

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Gilbert MAHOX

PREMIÈRE THÈSE

EXTENSION DES PROPRIÉTÉS D'ANALYTICITE AXIOMATIQUES
POUR DES PARTICULES DE SPINS QUELCONQUES
ET RELATIONS DE SUPERCONVERGENCE

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

LES PULSARS

Soutenues le 11 février 1969 devant la commission d'examen

MM. J. YVON

Président

A. MARTIN

Examineurs

R. OMNES

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Gilbert MAHOUX

PREMIÈRE THÈSE

EXTENSION DES PROPRIÉTÉS D'ANALYTICITE AXIOMATIQUES
POUR DES PARTICULES DE SPINS QUELCONQUES
ET RELATIONS DE SUPERCONVERGENCE

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

LES PULSARS

Soutenues le 11 février 1969 devant la commission d'examen

MM. J. YVON

Président

A. MARTIN

Examineurs

R. OMNES



UNIVERSITE DE PARIS

FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

Liste des PROFESSEURS

JANVIER 1967

Le Doyen : M. ZAMANSKY

GRASSE	T Evolution des êtres organisés	GALLIEN	T Embryologie
PREVOST	T Chimie organique	Mlle	
WYART	T Minéralogie et cristallographie	CAUCHOIS	T Chimie physique
TEISSIER	T Zoologie	THELLIER	T Physique du globe
AUGER	T Physique quantique et relativité	PONCIN	T Mécanique générale
MONNIER	T Physiologie générale	DUBREIL	T Arithmétique et théorie des nombres
PIVETEAU	T Paléontologie	CAGNIARD	T Géophysique appliquée
ROCARD	T Physique E. N. S.	CHAMPETIER	T Chimie macromoléculaire
CARTAN	T Mathématiques E. N. S.	CUVILLIER	T Micropaléontologie
LAFFITTE	T Chimie générale	TRILLAT	Microscopie et diffraction électronique
N. L.	T Géométrie supérieure	WIEMANN	T Chimie organique et structurale
COULOMB	T Physique du globe	VASSY	T Physique de l'atmosphère
CHRETIEN	T Chimie minérale	DESTOUCHES	T Théorie physique
BOCQUET	T Zoologie	AMIEL	T Chimie générale
KASTLER	T Physique E. N. S.	J.P. MATHIEU	T Physique optique
EPHRUSSI	T Génétique	COUTEAUX	T Cytologie
GAUTHERET	T Biologie végétale CPEM	CHOQUET	T Théorie des fonctions et topologie
LUCAS R.	Recherches physiques	FELDMANN	T Biologie végétale marine
THOMAS A.	T Biologie	JOST	T Physiologie comparée
MORAND	T Physique enseignement	FORTET	T Calcul des probabilités et physique mathématiques
SOLEILLET	T Physique CPEM	SCHWARTZ	T Calcul différentiel et intégral
FORTIER	T Mécanique expérimentale des fluides	CHOUARD	T Physiologie végétale
DRACH	T Biologie maritime	MALAVARD	T Aviation (technique aéronautique)
QUENEY	T Météorologie et dynamique de l'atmosphère		

BRELOT	T Analyse supérieure	OLMER	T Energétique générale
EICHHORN	T Botanique	GAUTHIER	T Mécanique appliquée
BENARD	T Chimie appliquée	BARCHEWITZ	T Chimie physique
DUGUE	T Statistique mathématique	BROSSEL	T Physique atomique
SOULAIRAC	T Psychophysiologie	BUSER	T Physiologie comparée
ULRICH	T Physiologie végétale appliquée	CAMUS	T Physiologie végétale
KIRRMANN	T Théories chimiques	CURIEN	T Minéralogie et cristallographie
CHADEFAUD	T Botanique	POSSOMPES	T Zoologie
Mlle		PULLMANN	T Chimie quantique
LE BRETON	T Physiologie de la nutrition	TEILLAC	T Physique nucléaire et radioactivité
LELONG	T Application de l'analyse à la géométrie	VILLE	T Econométrie
DEVILLERS	T Anatomie comparée	FREYMAN	T Recherches physiques
EHRESMANN	T Topologie algébrique	ROLLET	T Chimie minérale
FRANCON	T Physique SPCN	Mlle JOSIEN	T Chimie SPCN
GLANGEAUD	T Géographie physique, géologie dynamique	CHEVALLEY	T Géométrie algébrique et théorie des groupes
GODEMENT	T Mathématiques MGP	GERMAIN	T Mécanique et théorie des fluides
PISOT	T Technique mathématiques de la physique	LUCAS G.	T Géologie
ROCH	T Géologie	ALLARD	T Chimie physique
SCHATZMANN	T Astrophysique	BERTHELOT	T Physique des particules fondamentales
TERMIER	T Géologie générale	BRICARD	T Météorologie
ZAMANSKY	T Mathématiques générales	Mme	
LENNUIER	T Physique M. G. P.	ALBE	
ROUTHIER	T Géologie appliquée	FESSARD	T Psycho-physiologie
Mme		M. JULIA	T Etude des molécules naturelles complexes
TONNELAT	T Physique théorique	MAGAT	T Physico-chimie des rayonnements
DIXMIER	T Mathématiques M. P. C.	MONOD	T Chimie du métabolisme
SOUCHAY	T Chimie générale	BRUN	T Mécanique des fluides I
AIGRAIN	T Electrotechnique	Mme	
BRUSSET	T Chimie systématique	DUBREIL	T Mathématiques (Agrégation)
LEVY	T Physique théorique des hautes énergies	Mme LELONG	T Mathématiques II E. N. S.
Mme CHAIX	T Chimie biologique	BELLAIR	T Géologie SPCN
Mme HUREL	PY T Biologie végétale CPEM	BOUSSIÈRES	T Radiochimie
PANNETIER	T Chimie générale I	Mme	
NORMANT	T Synthèse organique	COUTURE	T Thermodynamique et mécanique
YVON	T Théories physiques	FRANC	Biologie animale CPEM
COTTE	T Physique électricité	SCHNELL	T Botanique tropicale
DUBOIS J.E.	T Chimie organique physique		
LAMOTTE	T Zoologie E. N. S.		

STOLKOWSKI	T	Physiologie générale	DUBERT	Biochimie
ACHER	T	Chimie biologique	NOZIERES	T Physique fondamentale
BAUDOIN	T	Biologie animale CPEM	CADIOT	
BEAUMONT		Biologie animale SPCN	IVANOFF	T Océanographie physique
BLAMONT		Géophysique ionosphère	FRANCOIS	Chimie organique
BOUREAU	T	Botanique	TALBOT	Génie chimique
CURIE D.		Physique MGP	Mme	
DURAND-DELGA	T	Géologie	NOUGAREDE	Botanique
HELLER	T	Physiologie végétale	BRUHAT	T Mathématiques M. P. C.
TORTRAT	T	Calcul des probabilités	FOURNET	Electricité générale
CAILLEUX	T	Géologie SPCN	DEHEUEVELS	T Mathématiques propédeutique
MAGNAN	T	Physique électricité	FURON	T Géologie SPCN
DAUDEL	T	Mécanique ondulatoire	Mme GANS	T Génétique
Mme CHOQUET			GENEVES	Biologie végétale CPEM
BRUHAT	T	Mécanique analytique, mécanique céleste	HUPE	T Pétrographie
Mlle VEIL	T	Physiologie générale	HOLLANDE	T Biologie générale
LWOFF	T	Microbiologie	LIONS	T Analyse numérique
SIESTRUNCK	T	Mécanique et physique expérimentale	MAITTE	T Chimie organique
CABANNES	T	Mécanique théorique	NICOLAS	Géologie appliquée
CAIRE	T	Géographie physique et géologie dynamique	PANIGEL	Biologie générale
COMOLET	T	Mécanique des fluides	RAVIER	T Pétrographie
DELLOUE	T	Physique de l'exosphère	MOREL F.	T Physiologie comparée
HOUILLOIN	T	Biologie animale	ROSEAU	T Mécanique théorique des fluides
OLIVIER	T	Anthropologie	ROUBINE	T Electronique E. S. E.
SAMUEL	T	Mathématiques (E. N. S. (E. N. S. Jeunes Filles)	SILBER	T Chimie CPEM
DE POSSEL	T	Analyse numérique	UEBERSFELD	T Electronique
CHARLOT	T	Chimie analytique	THIRY	T Mécanique céleste
CHATELET	T	Chimie CPEM	ABELES	T Physique SPCN
MATTLER	T	Physique SPCN	AMAT	T Thermodynamique
AUBOUIN	T	Géologie	BALKANSKI	Physique M. P. C. 1
Mme BENOIT-GUEUTAL	T	Physique nucléaire et radio-activité	LE CORRE	T Electricité
BOUGIS		Biologie végétale marine Villefranche-sur-Mer	NATAF	T Physique nucléaire et radio-activité
RIGAUDY	T	Chimie SPCN	ECHALIER	Biologie animale CPEM
COLLONGUES	T	Chimie appliquée	BARRAUD	T Physique CPEM
			DARS	Géologie structurale et appliquée
			CAMEFORT	Botanique (Agrégation)
			VICH-NIEWSKY	T Mécanique industrielle

SIGWALT	Chimie SPCN	CAGNAC	Electricité
BLAQUIERE	Automatique	FALK-VAIRANT	Physique nucléaire
BARUCH	Physique propédeutique	KRASNER	T Mathématiques
ARNOUS	T Physique théorique	BENZECRI	T Statistiques
SLONINSKI	Génétique	VINH MAU	Physique MGP
MALLIAVIN	T Mathématiques propédeutique	DUQUESNES	Physique CPEM
GAUDEMAR	Chimie propédeutique	SCHUTZEN- BERGER	T Programmation
BROUSSE	T Mécanique théorique	TREMILLON	Chimie M. P. C.
ROSCH	T Astronomie	FAYARD	Chimie M. P. C.
GUY	T Physique expérimentale	BUVET	Chimie CPEM
LAZARD	T Mathématiques M. P. C.	AUTHIER	Minéralogie et cristallogra- phie
MOREL P.	Physique M. P. C.	BONNEFILLE	Electrotechnique
ARSAC	Programmation	Mme	
LEFEBVRE	T Chimie M. P. C.	PUISEUX DAO	Biologie végétale
BOK	Physique fondamentale	BERGER	T Géométrie supérieure
CHAPEVILLE	Biochimie	Mlle	
BENOIT	Physique CPEM	LIBERMANN	T Mathématiques
RIO	Chimie CPEM	DEDONDER	T Biologie cellulaire
JAUZEIN	Géologie E. N. S.	DUFOUR	T Electronique I. U. T.
PREVOST G.	Biologie cellulaire	SCHAAL	Chimie CPEM
FAVARD P.	Biologie animale CPEM	BAUCHOT	Anatomie comparée
Mme		LANCE	BV CPEM
CHARNIAUX- COTTON	Evolution des êtres organisés	GIRAUD	Botanique E. N. S.
Mlle FICINI	Chimie CPEM	HULIN	Physique PC
LEQUEUX	Astronomie	VIGIER	Génétique
COHEN- TANNOUDJI	Physique atomique	GUERN	Biologie végétale
HERVE	T Mathématiques	SLODZIAN	Physique CPEM
Mme		LACOMBE	Logique mathématique
PECKER- WIMEL	T Astrophysique	TAVLITZKI	Biologie cellulaire
TAVERNIER	Physique PC	ARVIEU	Physique CPEM
DURAND M.	Biologie animale SPCN	TAXI	B. A. CPEM
PASCAUD	Physiologie	COLLENOT	B. A. CPEM
Mme PETIT	Biologie animale CPEM	BASSELIER	Chimie propédeutique
		BADOUAL	Electronique I. UT.

LE SECRETAIRE GENERAL,

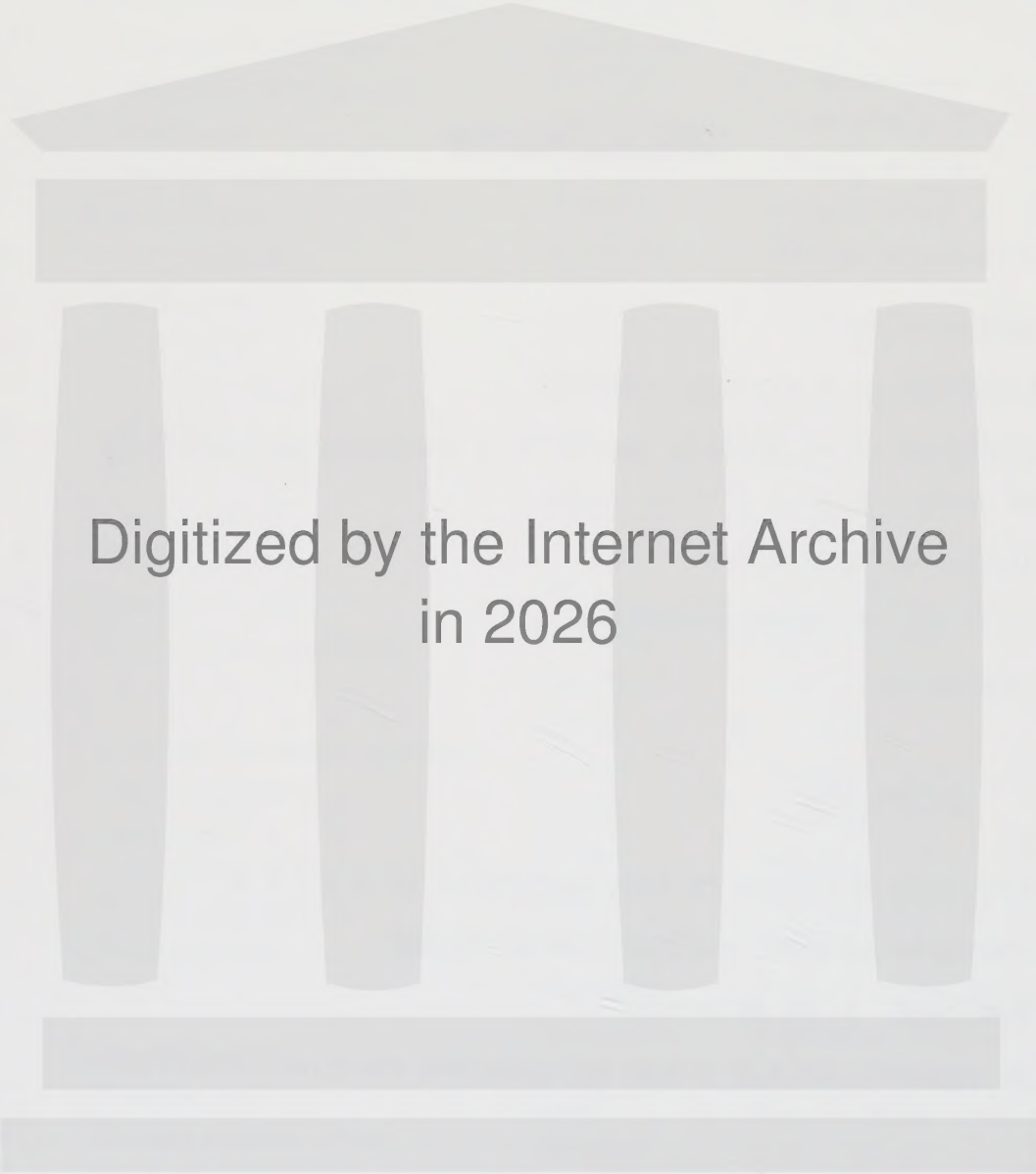
R. POULLAIN

TABLE DES MATIERES

I - INTRODUCTION	11
II - DIFFUSION DE PARTICULES SCALAIRES	17
III - EXTENSION DU THEOREME DE MARTIN A LA DIFFUSION DE PARTICULES DE SPINS NON NULS	23
IV - BORNES DE FROISSART	37
V - RELATIONS DE SUPERCONVERGENCE	43
VI - CONCLUSION	47

APPENDICES

A - DIFFUSION ELASTIQUE DE DEUX PARTICULES DE SPINS 0 ET 1	51
B - FONCTIONS DE TYPE POSITIF SUR UN GROUPE	67
C - FONCTIONS d DE ROTATIONS	75
D - UN THEOREME SUR LES BORNES DE CERTAINES FONCTIONS ANALYTIQUES.	79



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551519_0024

REMERCIEMENTS

Ce travail est le résultat d'une étroite et amicale collaboration avec A.MARTIN, au cours d'une année passée à l'Université de l'Etat de New-York à Stony-Brook. Je suis heureux de pouvoir lui dire ici combien son amitié et ses conseils m'ont été précieux tout au long de cette année.

Je remercie les Professeurs C.N. YANG, B. LEE, J.S. TOLL , T.A. POND et M. DRESDEN de l'hospitalité qu'ils m'ont accordée à l'Université de Stony-Brook. J'ai eu là d'intéressantes discussions avec le Prof. G.FURLAN.

Le Professeur J. YVON a bien voulu patronner cette thèse, et je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie très vivement les Professeurs C. BLOCH et A. MESSIAH qui m'ont accueilli dans leur Service de Physique Théorique, au sein duquel j'ai pu m'initier à la recherche scientifique.

J'ai eu des discussions nombreuses et fructueuses avec mes camarades J. BROS, H. NAVELET et R. STORA . Ce dernier en particulier m'a introduit à la théorie des fonctions de type positif. Qu'ils soient tous remerciés ici de l'aide qu'ils m'ont apportée.

Enfin, je suis très reconnaissant à Madame PORNEUF , Madame D. BUNEL et Madame F. LEFEVRE du soin qu'elles ont apporté à la présentation matérielle de ce travail.

EXTENSION DES PROPRIETES D'ANALYTICITE AXIOMATIQUES POUR DES PARTICULES DE SPINS QUELCONQUES, ET RELATIONS DE SUPERCONVERGENCE

CHAPITRE I

INTRODUCTION

C'est en 1966 que sont apparues les règles de somme pour les interactions fortes, que l'on appelle maintenant relations de superconvergence, et qui ont été établies tout d'abord dans le cadre de "l'algèbre des courants" [1]. Il était clair, cependant, dès cette époque, que les relations trouvées n'avaient rien à voir avec l'algèbre des courants elle-même, et que seule comptait la propriété de localité des courants. Cela suggérait l'existence d'une méthode de démonstration plus directe, ne faisant appel qu'à des hypothèses relatives aux interactions fortes, telle que analyticité et bornes asymptotiques. Effectivement, ces règles de somme furent retrouvées en utilisant des relations de dispersion, complétées par des comportements asymptotiques déduits du modèle des pôles de Regge [2], ce qui mettait en évidence pour la première fois le rôle essentiel de l'unitarité. Malgré cela, on pouvait encore soupçonner qu'elles avaient un caractère beaucoup plus général, et que l'on pourrait les établir à partir des seuls axiomes de la théorie locale des champs. En effet, A. Martin [3,4], partant du domaine d'analyticité démontré en théorie des champs pour l'amplitude de diffusion élastique de deux particules sans spin, et utilisant la condition d'unitarité, avait été capable de démontrer les bornes de Froissart [5] *.

On pouvait donc espérer qu'en utilisant les mêmes techniques, on pourrait obtenir pour les amplitudes de réaction de particules avec spin, des bornes asymptotiques analogues aux bornes de Froissart, d'où l'on pourrait déduire des relations de superconvergence. Le but de ce travail est de montrer qu'il en est bien ainsi, c'est-à-dire que, quelle que soit la structure des forces qui régissent les interactions entre particules, l'existence de champs locaux satisfaisant les axiomes de la théorie des champs entraîne celle de relations de superconvergence.

Avant d'aller plus avant, rappelons brièvement ce qu'est une relation de superconvergence, et comment de telles relations sortent du modèle

*Froissart avait établi ces bornes à l'aide de la représentation de Mandelstam, donc avec un domaine d'analyticité beaucoup plus vaste que celui utilisé par Martin, domaine d'ailleurs non démontré jusqu'à ce jour.

des pôles de Regge. Considérons, par exemple, le cas simple du système $\rho\pi$, en oubliant pour l'occasion que la particule ρ est instable à l'égard des interactions fortes. Appelons s et t , suivant l'usage, le carré des énergies totales dans le centre de masse des voies $\rho\pi \rightarrow \rho\pi$ et $\rho\rho \rightarrow \pi\pi$ respectivement. La réaction dans la voie t ($\rho\rho \rightarrow \pi\pi$) est décrite communément par les amplitudes d'hélicité $M_{\lambda\mu}^t$, où λ et μ sont les hélicités des particules ρ . On montre (voir appendice A) que l'amplitude $M_{+1,-1}^t$ peut se mettre sous la forme :

$$M_{+1,-1}^t = \frac{t-4\mu^2}{8} \sin^2 \theta_t A(s,t) \quad (1)$$

où θ_t est l'angle de réaction dans le système du centre de masse de la voie t , et où A est une fonction qui satisfait des relations de dispersion en s à t fixé ≤ 0 . Dans le modèle des pôles de Regge^[2], le comportement asymptotique en s à t fixé est déterminé par une trajectoire $\alpha(t)$:

$$M_{+1,-1}^t \sim s^{\alpha(t)} \beta(t) \quad \text{lorsque } s \rightarrow \infty \text{ à } t \text{ fixé.} \quad (2)$$

Sachant que $\sin \theta_t$ se comporte comme s dans les mêmes conditions, on en déduit que :

$$A(s,t) \sim s^{\alpha(t)-2} \gamma(t) \quad \text{lorsque } s \rightarrow \infty \text{ à } t \text{ fixé.} \quad (3)$$

Or la borne de Froissart impose à toute trajectoire de Regge, la contrainte $\alpha(t) \leq 1$ lorsque $t \leq 0$. Pour l'amplitude A_1 d'isospin 1 dans la voie t , $\alpha(t)$ est la trajectoire de la particule ρ pour laquelle $\alpha(0) \sim 0,5$. Ainsi A_1 se comporte comme $s^{-1,5}$ et satisfait donc une relation de dispersion non soustraite :

$$A_1(s,t) = \frac{1}{\pi} \int \frac{a_1(s',t) ds'}{s'-s} \quad (t \leq 0) \quad (4)$$

En fait même, nous aurions pu écrire une relation de dispersion non soustraite pour $s A_1(s,t)$ puisque $s A_1 \rightarrow 0$ à l'infini. Exprimons que $s A_1 \rightarrow 0$ à l'aide de l'expression (4) de A_1 . On obtient immédiatement :

$$\int a_1(s,t) ds = 0 \quad (t \leq 0) \quad (5)$$

qui est la relation de superconvergence cherchée.*

Ainsi pour être dite superconvergente, une amplitude doit remplir deux conditions : a) satisfaire des relations de dispersion, b) tendre vers zéro plus vite que $1/s$ lorsque $s \rightarrow \infty$ à transfert t fixé.

Remarquons encore que si la borne de Froissart est atteinte (au $\log^2 s$ près), $\alpha(0) = 1$, et $s A(s,t)$ tend vers une constante différente de zéro à l'infini. On n'a donc plus dans ce cas de relation de superconvergence. C'est ce qui se passe pour l'amplitude A_0 d'isospin zéro dans la voie t , dont le comportement asymptotique est donné par le "Pomeranchuk". Nous retrouverons plus tard ce résultat. En effet nous n'obtiendrons d'amplitudes de diffusion élastique superconvergentes, que si l'une des particules diffusées a un spin supérieur ou égal à $3/2$. Le cas du système $\rho\pi$ (spins zéro et un) est marginal, et en l'absence de tout modèle dynamique tel que le modèle de Regge, nous ne trouverons pas d'amplitude superconvergente.

Revenons maintenant à la diffusion de particules scalaires, et à la démonstration par Martin des bornes de Froissart. Cette démonstration s'effectue en deux étapes distinctes. La première^[3] consiste à montrer que les propriétés de positivité (dues à l'unitarité) de la partie absorptive de l'amplitude de diffusion élastique pour des particules scalaires, entraînent un élargissement très substantiel du domaine d'analyticité donné par le "programme linéaire" de la théorie axiomatique des champs. En bref, Martin a montré que cette amplitude satisfait des relations de dispersion en s à t fixé, pour tout transfert t complexe dans le cercle $|t| < R$, où R , dans la plupart des cas, est égal à $4\mu^2$ (μ est la masse des pions). Nous reviendrons plus loin sur l'énoncé précis de ce théorème. Cela fera l'objet du deuxième chapitre. Remarquons ici que l'analyticité en t jusqu'à une valeur positive fixe R , signifie, en termes physiques, que la portée des forces est une constante finie, indépendante de l'énergie. Bien sûr, du fait même que le point de départ est la théorie axiomatique des champs, les parti-

*La discontinuité $a_1(s,t)$ peut s'exprimer à l'aide de grandeurs mesurables. La relation (5) devient alors une règle de somme susceptible de tests expérimentaux.

**Champs qui satisfont des conditions asymptotiques.

cules de masse nulle, susceptibles d'introduire des portées infinies, sont ignorées. Cela est justifié pour les interactions fortes. Pour les mêmes raisons, l'on ignore les particules instables (au moins celles qui le sont à l'égard des interactions fortes), pour lesquelles il n'existe pas de champs locaux satisfaisant des conditions asymptotiques.

La deuxième étape consiste à exploiter le nouveau domaine d'analyticité^[4]. Schématiquement, la démonstration se fait de la façon suivante : puisque l'amplitude de diffusion, que nous appellerons $F(s, \cos\theta)$, est analytique jusqu'à $t = R$, c'est-à-dire jusqu'à $\cos\theta = \cos\theta_R > 1$, son développement en ondes partielles converge jusqu'au point $\cos\theta_R$ (ou tout au moins jusqu'à un point $\cos\theta_R - \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on veut) :

$$F(s, \cos\theta_R) = \sum_{\ell} (2\ell+1) f_{\ell}(s) P_{\ell}(\cos\theta_R) . \quad (6)$$

Mais pour $\cos\theta_R > 1$, $P_{\ell}(\cos\theta_R)$ est une fonction exponentiellement croissante de ℓ . La convergence de (6) entraîne alors que $|f_{\ell}(s)|$ est une fonction exponentiellement décroissante de ℓ . Ceci est la clé de la démonstration. Ce n'est plus maintenant qu'un problème mathématique que de traduire cette borne exponentielle sur les ondes partielles, en la borne de Froissart sur l'amplitude totale. Appelons L le moment angulaire pour lequel la borne exponentielle coïncide avec la borne de l'unitarité $|f_{\ell}| < 1$.

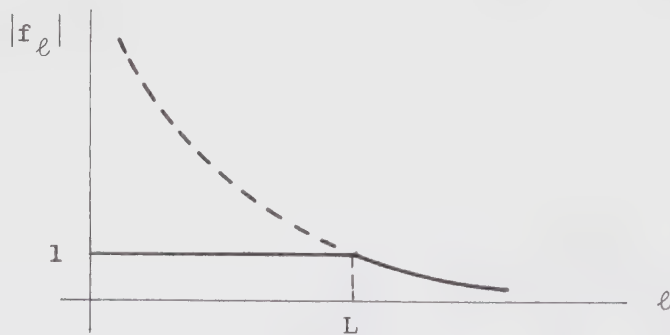


Figure 1

Utilisant la borne polynomiale s^N de F , Martin^[4] montre que L se comporte asymptotiquement comme $\sqrt{s} \log s$. Dans la région physique ($-1 \leq \cos\theta \leq 1$) :

$$|F(s, \cos\theta)| \leq \sum_{\ell=0}^L (2\ell+1) + \sum_{\ell>L} (2\ell+1) |f_{\ell}(s)| . \quad (7)$$

La contribution des ondes partielles $\ell > L$ bornées exponentiellement en ℓ , est négligeable. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
 |F(s, \cos\theta)| &\lesssim \sum_{\ell=0}^L (2\ell+1) = (L+1)^2 \\
 &\lesssim \text{Cste } s \log^2 s
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

ce qui est la borne de Froissart.

Dans le cas de la diffusion de particules avec spin, nous suivrons exactement les mêmes étapes. Nous montrerons premièrement que toutes les amplitudes régularisées qui décrivent un processus élastique à deux corps, satisfont, quels que soient les spins et les masses (différentes de zéro), des relations de dispersion en s pour tout transfert $|t| < R$. C'est la partie la plus difficile du problème. Elle fera l'objet du chapitre III. Dans le chapitre IV, utilisant le domaine d'analyticité élargi, nous montrerons que toute amplitude d'hélicité (non régularisée) est bornée asymptotiquement par $\text{Cste } s \log^2 s$. De ce résultat, et à l'aide de la méthode de L. Trueman^[6], nous déduirons, dans le chapitre V, l'existence de relations de superconvergence.

Rappelons ici que l'extension du domaine d'analyticité axiomatique pour les deux amplitudes A et B décrivant la diffusion élastique pion-nucléon, et le calcul des bornes asymptotiques que l'on en déduit, ont été réalisés par G. Sommer^[7]. Nous avons fait d'autre part le même travail pour la diffusion d'un spin zéro par un spin 1. Il fait l'objet de l'appendice A.

L'appendice B est consacré à un exposé succinct des propriétés des fonctions "de type positif sur un groupe". Les propriétés de positivité de Martin (voir chapitre II) sont intimement liées à celles des fonctions de type positif sur le groupe des rotations du plan.

L'appendice C contient le rappel ou la démonstration de propriétés des fonctions $d_{\lambda\mu}^j(\theta)$ du groupe des rotations, propriétés qui sont utilisées dans les chapitres IV et V.

Enfin, l'appendice D concerne un théorème sur les bornes de fonctions analytiques, dont nous ferons usage dans le chapitre V.

CHAPITRE II

DIFFUSION DE PARTICULES SCALAIRES

Considérons la diffusion élastique $A + B \rightarrow A + B$ des particules scalaires A et B , de masses m et μ . Appelons p, q, p' et q' leurs quadri-impulsions dans les états initial et final.

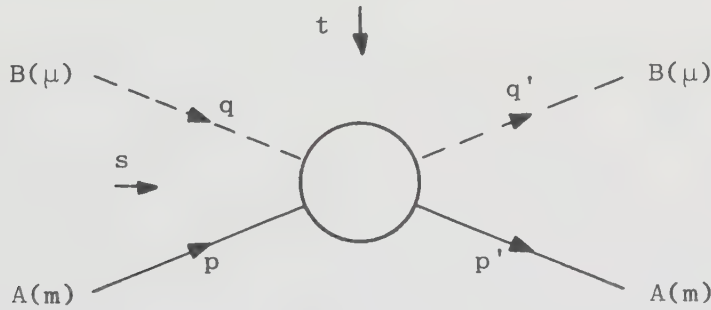


Figure 2

Les variables de Mandelstam sont définies par :

$$\begin{aligned} s &= (p+q)^2 \\ t &= (p-p')^2 \\ u &= (p-q')^2 \end{aligned} \tag{9}$$

Ces variables sont linéairement dépendantes :

$$s + t + u = 2(m^2 + \mu^2) \quad . \tag{10}$$

Elles sont reliées d'autre part à l'impulsion k_s et à l'angle de diffusion θ_s dans le repère du centre de masse de la voie s par :

$$\begin{aligned} s &= \left(\sqrt{k_s^2 + m^2} + \sqrt{k_s^2 + \mu^2} \right)^2 \\ t &= -2k_s^2 (1 - \cos\theta_s) \quad . \end{aligned} \tag{11}$$

Appelons $F(s,t)$, $A_s(s,t)$ et $A_u(u,t)$, l'amplitude de diffusion et les parties absorptives dans les voies s et u respectivement. Le programme linéaire de la théorie locale des champs nous apprend que :

a) $F(s,t)$ satisfait des relations de dispersion en s pour des transferts fixes t tels que $-t_M < t \leq 0$ [8]. Dans certains cas défavorables (cela dépend du spectre des masses qui intéressent le processus considéré, et c'est le cas en particulier pour la diffusion nucléon-nucléon), l'existence de relations de dispersion n'est pas démontrée. Cependant Bros, Epstein et Glaser [15] ont montré que pour $-t_M < t \leq 0$, il y a encore analyticité en s dans un plan coupé dont on a exclu une région finie qui ne touche pas les points physiques. Cette analyticité réduite est suffisante pour le théorème de Martin.

b) Pour toute valeur physique de s ($s > (m+\mu)^2$), l'amplitude $F(s,t)$ et sa partie absorptive $A_s(s,t)$ sont analytiques en t dans les "ellipses de Lehmann" [10], de foyers $\cos\theta_s = \pm 1$ (ou $t = 0$ et $t = -4k_s^2$). Ces ellipses présentent la caractéristique de s'aplatir sur l'axe réel dans le plan de la variable t , lorsque s croît indéfiniment, de sorte que la région commune à toutes ces ellipses ne contient que des points réels. Elles ne permettent donc pas l'écriture de relations de dispersion pour des transferts t complexes.

c) Il existe un voisinage d'analyticité à la fois en s et t pour tout point (s,t) tel que s soit dans le plan coupé et $-t_M < t \leq 0$ [9]. A priori, la dimension de ce voisinage peut varier avec s et t .

Viennent maintenant les propriétés de positiv  des parties absorptives dans les voies s et u , dues à l'unitarité* :

$$d) \left| \left(\frac{d}{d \cos\theta_s} \right)^n A_s(s, \cos\theta_s) \right|_{-1 \leq \cos\theta_s \leq 1} \leq \left(\frac{d}{d \cos\theta_s} \right)^n A_s(s, \cos\theta_s) \Big|_{\cos\theta_s = 1} \quad (12,a)$$

*En théorie axiomatique des champs, les parties absorptives $A_s(s, \cos\theta_s)$ et $A_u(u, \cos\theta_u)$ sont, de façon générale, des distributions respectivement en s et u . Il n'est donc pas correct de parler par exemple du module $|A_s(s, \cos\theta_s)|$. Il faudrait, en principe, commencer par régulariser A_s et A_u avec des fonctions tests positives φ :

$$A_s^\varphi(s, \cos\theta_s) = \int ds' A_s(s', \cos\theta_s) \varphi(s'-s) \quad \dots/.$$

$$\left| \left(\frac{d}{d \cos \theta_u} \right)^n A_u(u, \cos \theta_u) \right|_{-1 \leq \cos \theta_u \leq 1} \leq \left| \left(\frac{d}{d \cos \theta_u} \right)^n A_u(u, \cos \theta_u) \right|_{\cos \theta_u = 1} \quad (12, b)$$

(à noter le changement de variables. Nous utiliserons par la suite tantôt s et t , tantôt s et $\cos \theta_s$).

Ces inégalités sont la conséquence, d'une part, de la positivité des parties absorptives des ondes partielles $\text{Im } f_\ell$ dans le développement :

$$A_s(s, \cos \theta_s) = \sum_{\ell} (2\ell+1) \text{Im } f_\ell(s) P_\ell(\cos \theta_s), \quad (13)$$

et d'autre part, des inégalités analogues à (12) satisfaites par les polynômes de Legendre (voir appendice B) :

$$\left| \left(\frac{d}{d \cos \theta} \right)^n P_\ell(\cos \theta) \right|_{-1 \leq \cos \theta \leq 1} \leq \left| \left(\frac{d}{d \cos \theta} \right)^n P_\ell(\cos \theta) \right|_{\cos \theta = 1} \quad (14)$$

Les propriétés a), b), c), d) sont les hypothèses du théorème de Martin, qui s'énonce ainsi^[3] :

1) $F(s, t)$ satisfait des relations de dispersion en s , pour des transferts fixes t dans le cercle $|t| < R$, où R est, dans la plupart des cas, égal à quatre fois la masse carrée du pion.

2) Si le nombre de soustractions est N à $t = 0$, alors il est égal à N si N est pair, ou $N+1$ si N est impair, pour tout t dans le cercle $|t| < R$.

Une conséquence immédiate est que, à s fixé $\geq (m+\mu)^2$, $F(s, t)$ et $A_s(s, t)$ sont analytiques en t dans des ellipses plus grandes que celles de Lehmann, et qui ne se réduisent pas à l'axe réel négatif lorsque $s \rightarrow \infty$, car elles contiennent toujours le cercle $|t| < R$.

*
./... et écrire les inégalités (12) avec les régularisées A_s^φ et A_u^φ . Le théorème de Martin s'applique donc en fait à l'amplitude $F^\varphi(s, t)$, qu'il faut ensuite "dérégulariser" pour obtenir la vraie amplitude. Ces opérations de régularisation et dérégularisation compliquent les choses sans modifier les résultats. Afin de ne pas alourdir inutilement le texte, nous ferons, tout au long de ce travail, l'hypothèse que les parties absorptives sont des fonctions et non des distributions. Signalons d'ailleurs que cette hypothèse se révèle inévitable lorsque l'on veut aller plus avant dans le programme non linéaire.

Les propriétés a), b), c) sont encore valables pour les amplitudes de diffusion de particules avec des spins différents de zéro, à condition que les amplitudes considérées soient libres de singularités cinématiques. Or, depuis des travaux récents^[11] *, nous savons parfaitement régulariser les amplitudes d'hélicité^[12] et de transversité^[13]. Pour cette raison, ce sont ces amplitudes que nous utiliserons dans la suite, pour décrire les processus de diffusion de particules avec spin.

Ceci étant, pour étendre le théorème de Martin à ces processus, la voie est toute tracée : nous devons construire une ou plusieurs amplitudes libres de singularités cinématiques, et possédant les propriétés de positivité (12). Une telle amplitude sera, en vertu du théorème de Martin, analytique dans le produit quasi-topologique du plan coupé de la variable s par le cercle $|t| < R$. Nous verrons que nous pourrions construire suffisamment d'amplitudes de ce type pour montrer que toutes les amplitudes sans singularité cinématique qui décrivent le processus considéré, sont analytiques dans le domaine de Martin.

Mais auparavant, revenons aux propriétés de positivité (12) des parties absorptives, pour montrer leur connection avec les fonctions dites de type positif sur le groupe R_2 des rotations du plan (voir appendice B). Une fonction définie sur ce groupe est une fonction $f(\theta)$ de période 2π . Elle est dite de type positif si, quelle que soit $\varphi(\theta)$, on a :

$$\int_0^{2\pi} d\theta' \int_0^{2\pi} d\theta \varphi^*(\theta') f(\theta' - \theta) \varphi(\theta) \geq 0 . \quad (15)$$

Il est montré dans l'appendice B (théorème 4), qu'une fonction de $\cos\theta$ analytique dans un voisinage du segment $(-1, +1)$, et de type positif sur le groupe R_2 , possède automatiquement les propriétés de positivité de Martin.

Utilisons ici ce théorème : la partie absorptive $A_s(s, \cos\theta_s)$ est analytique en $\cos\theta_s$ à l'intérieur de l'ellipse de Lehmann. Montrons directement, sans passer par le développement en ondes partielles, qu'elle est de type positif sur R_2 . Changeons pour cela de notations, et écrivons :

$$A_s(s, \cos\theta_s) = \text{Abs}_s \langle \hat{p}' | T | \hat{p} \rangle , \quad (16)$$

* Parmi ces travaux, nous citerons particulièrement celui de Cohen-Tannoudji, Morel et Navelet (désignés ci-après sous le nom de Comonave), qui ont utilisé les résultats de D.N. Williams [14], démontrés en théorie axiomatique des champs.

où $\hat{\vec{p}}$ et $\hat{\vec{p}}'$ sont les vecteurs unitaires portés par les impulsions $\vec{p}$ et $\vec{p}'$ des particules A incidente et sortante, dans le repère du centre de masse. L'unitarité s'écrit, avec des notations habituelles :

$$\text{Abs}_s \langle \hat{\vec{p}}' | T | \hat{\vec{p}} \rangle = \sum_N \langle \hat{\vec{p}}' | T^\dagger | N \rangle \langle N | T | \hat{\vec{p}} \rangle . \quad (17)$$

On en déduit aussitôt que quelle que soit la fonction $\varphi(\hat{\vec{p}})$ définie sur la sphère :

$$\int d\hat{\vec{p}}' \int d\hat{\vec{p}} \varphi^*(\hat{\vec{p}}') \text{Abs}_s \langle \hat{\vec{p}}' | T | \hat{\vec{p}} \rangle \varphi(\hat{\vec{p}}) = \sum_N \left| \int d\hat{\vec{p}} \langle N | T | \hat{\vec{p}} \rangle \varphi(\hat{\vec{p}}) \right|^2 \geq 0 . \quad (18)$$

Ceci montre que $\text{Abs}_s \langle \hat{\vec{p}}' | T | \hat{\vec{p}} \rangle$ est de type positif sur le groupe R3 des rotations dans l'espace à 3 dimensions. Pour nous restreindre au groupe R2 , prenons pour $\varphi(\hat{\vec{p}})$ une fonction ayant son support sur un grand cercle de la sphère unité. L'inégalité (18) devient :

$$\int_0^{2\pi} d\theta' \int_0^{2\pi} d\theta \varphi^*(\theta') A_s[s, \cos(\theta' - \theta)] \varphi(\theta) \geq 0 . \quad (19)$$

Ainsi la partie absorptive $A_s(s, \cos\theta_s)$ est bien de type positif : elle satisfait donc les propriétés de positivité (12,a) de Martin.

CHAPITRE III

EXTENSION DU THEOREME DE MARTIN A LA DIFFUSION DE PARTICULES DE SPINS NON NULS

I - DIFFUSION ELASTIQUE DE DEUX PARTICULES DE SPINS 0 ET σ

Considérons tout d'abord la diffusion élastique $A+B \rightarrow A+B$ des particules A et B, de masses m et μ , et de spins σ et 0. Nous examinerons plus tard le cas général de deux spins σ et σ' différents de zéro, cas qui introduit des complications d'écriture, mais se traite essentiellement de la même façon. Les notations, analogues à celles du chapitre précédent, sont résumées dans la figure suivante :

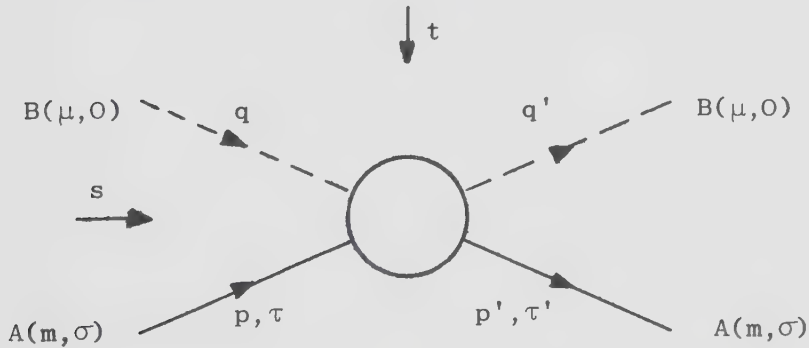


Figure 3

τ et τ' précisent les états de spin initial et final de la particule A. Les variables s, t, u de Mandelstam sont toujours définies par les formules (9).

Introduisons, avec Comonave, les quantités suivantes :

$$\begin{aligned}\psi &= (m^2 - \mu^2)^2 - su \\ \mathcal{S} &= \sqrt{[s - (m + \mu)^2][s - (m - \mu)^2]} \\ \mathcal{U} &= \sqrt{[u - (m + \mu)^2][u - (m - \mu)^2]}\end{aligned}\tag{20}$$

$\mathcal{S}$ et $\mathcal{U}$ sont définis dans les plans des variables s et u , coupés sur l'axe réel entre le seuil $(m+\mu)^2$ et le pseudo-seuil $(m-\mu)^2$. Les déterminations choisies sont telles que $\mathcal{S}$ est positif dans la région physique de la voie s , tandis que $\mathcal{U}$ l'est dans celle de la voie u .

Remarquons que l'équation de la frontière des régions physiques s'écrit $t\psi = 0$. Cette frontière se décompose en la droite $t = 0$ et l'hyperbole $\psi = 0$.

Nous aurons besoin des quantités $\sqrt{s}$, $\sqrt{t}$, $\sqrt{u}$ et $\sqrt{\psi}$, que nous définirons respectivement dans les plans des variables s, t, u et ψ , coupés suivant l'axe réel positif, avec la détermination positive au-dessus de la coupure. On vérifie aisément avec le croisement de Bros, Epstein et Glaser^[15], que $\sqrt{\psi}$ est positif aussi bien dans la région physique de la voie s que dans celle de la voie u (voir aussi Comonave, chap. III, §. 3.A). Ceci étant, les impulsions q_s et q_u , et les angles de diffusion θ_s et θ_u dans les repères du centre de masse des voies s et u , sont donnés par :

$$\begin{aligned} q_s^2 &= \frac{\mathcal{S}^2}{4s} \\ q_u^2 &= \frac{\mathcal{U}^2}{4u} \end{aligned} \quad (21)$$

et :

$$\begin{aligned} \cos \frac{\theta_s}{2} &= \frac{\sqrt{\psi}}{\mathcal{S}} & \sin \frac{\theta_s}{2} &= \frac{\sqrt{-ts}}{\mathcal{S}} \\ \cos \frac{\theta_u}{2} &= \frac{\sqrt{\psi}}{\mathcal{U}} & \sin \frac{\theta_u}{2} &= \frac{\sqrt{-tu}}{\mathcal{U}} \end{aligned} \quad (22)$$

($\sqrt{-t}$ est positif dans les régions physiques s et u).

La diffusion élastique $A+B \rightarrow A+B$ est commodément décrite par les amplitudes de transversité $T_{\tau',\tau}^s$, où l'indice supérieur s dénote la voie s . Ces amplitudes possèdent des singularités cinématiques, et notre première tâche consiste à les régulariser. D'après Comonave, les amplitudes :

$$M_{\tau',\tau} = \mathcal{S}^{|\tau|+|\tau'|} \left[T_{\tau',\tau}^s + (-)^{\tau-\tau'} T_{-\tau',-\tau}^s \right] \quad (23,a)$$

$$N_{\tau',\tau} = \left(\mathcal{S}^{|\tau|+|\tau'|} / \sqrt{-t\psi} \right) \left[T_{\tau',\tau}^s - (-)^{\tau-\tau'} T_{-\tau',-\tau}^s \right] \quad (23,b)$$

lorsque σ est entier, et les amplitudes :

$$M_{\tau', \tau} = \mathcal{J}^{|\tau|+|\tau'|} \sqrt{t} \left[T_{\tau', \tau}^s + (-)^{\tau-\tau'} T_{-\tau', -\tau}^s \right] \quad (24, a)$$

$$N_{\tau', \tau} = \left(\mathcal{J}^{|\tau|+|\tau'|} / \sqrt{-t} \right) \left[T_{\tau', \tau}^s - (-)^{\tau-\tau'} T_{-\tau', -\tau}^s \right] , \quad (24, b)$$

lorsque σ est demi-entier, sont sans singularité cinématique*. Elles sont donc analytiques dans les ellipses de Lehmann, et satisfont des relations de dispersion en s , à transfert t fixé $-t_M < t \leq 0$.

D'autre part, une conséquence des axiomes de la théorie locale des champs est que toute amplitude régularisée, telle que M ou N , satisfait une relation de la forme suivante^[16]:

$$M_{\tau', \tau}(s+i\varepsilon, t) = M_{\tau, \tau'}(s-i\varepsilon, t)^* . \quad (25)$$

Cette équation (analyticité hermitique), qui relie l'amplitude physique $M_{\tau', \tau}(s+i\varepsilon, t)$ à l'amplitude non physique (car en-dessous de la coupure) $M_{\tau, \tau'}(s-i\varepsilon, t)$, traduit l'invariance CPT de la théorie locale des champs.

En raison des propriétés d'analyticité des amplitudes régularisées, la définition de $M_{\tau, \tau'}(s-i\varepsilon, t)$ est sans ambiguïté. En effet il n'y a qu'une seule façon de passer du bord supérieur de la coupure à son bord inférieur dans le plan coupé de la variable s . Il n'en est plus de même, en revanche, pour une amplitude qui possède des singularités cinématiques, car il existe alors plusieurs chemins non équivalents entre les deux bords de la coupure. Par convention nous choisirons toujours à l'avenir un chemin qui ne tourne autour d'aucune singularité cinématique, ce qui est toujours possible puisque l'on sait expliciter dans tous les cas les singularités cinématiques. Avec une telle prescription, l'amplitude non régularisée $T_{\tau', \tau}^s(s-i\varepsilon, t)$ est parfaitement définie à partir de $T_{\tau, \tau'}^s(s+i\varepsilon, t)$, et l'analyticité hermitique entraîne immédiatement que :

$$T_{\tau', \tau}^s(s+i\varepsilon, t) = T_{\tau, \tau'}^s(s-i\varepsilon, t)^* \quad (26)$$

*Ces amplitudes ont des zéros cinématiques, sans incidence toutefois sur les propriétés d'analyticité que nous cherchons à démontrer.

De cette façon-là, nous pourrions parler sans ambiguïté de la discontinuité (partie absorptive) sur la coupure en s , d'amplitudes non régularisées.

Afin de démontrer plus loin des propriétés de positivité, introduisons des notations adaptées à leur description :

$$T_{\tau',\tau}^s(s,t) \equiv \langle P, \vec{n}, \theta'_s, \tau' | T | P, \vec{n}, \theta_s, \tau \rangle \quad (27)$$

$P = p+q = p'+q'$ est l'impulsion totale dans la voie s , $\vec{n}$ est la normale au plan de diffusion, et θ_s et θ'_s sont les angles que font respectivement les vecteurs $\vec{p}$ et $\vec{p}'$ (dans le repère du centre de masse de la voie s) par rapport à une direction arbitrairement choisie dans le plan de diffusion. Remarquons que $T_{\tau',\tau}^s(s,t)$ est une fonction de $\theta'_s - \theta_s$, de période 2π si le spin σ est entier, et 4π si σ est demi-entier.

Ceci étant, la condition d'unitarité dans la voie s s'écrit :

$$\frac{1}{2i} \left[T_{\tau',\tau}^s(s,t) - T_{\tau,\tau'}^s(s,t)^* \right] = \sum_N \langle P, \vec{n}, \theta'_s, \tau' | T^\dagger | N \rangle \langle N | T | P, \vec{n}, \theta_s, \tau \rangle \quad (28)$$

L'on reconnaît dans le premier membre, l'élément de matrice de $(T-T^\dagger)/2i$ entre états de transversité. Compte tenu de l'analyticité hermitique (26), cette condition prend la forme suivante, qui fait apparaître la partie absorptive dans la voie s des amplitudes de transversité* :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} \left[T_{\tau',\tau}^s(s+i\varepsilon,t) - T_{\tau,\tau'}^s(s-i\varepsilon,t) \right] &\equiv \text{Abs}_s T_{\tau',\tau}^s(s,t) \\ &= \sum_N \langle P, \vec{n}, \theta'_s, \tau' | T^\dagger | N \rangle \langle N | T | P, \vec{n}, \theta_s, \tau \rangle \quad (29) \end{aligned}$$

On en déduit aussitôt que, quelle que soit la fonction $\varphi(\theta)$ définie sur l'intervalle $(0,4\pi)$:

*Notons que cette expression de l'unitarité ne fait pas appel à l'invariance par renversement du sens du temps. En présence de cette invariance, la matrice $T_{\tau',\tau}^s$ est symétrique : $T_{\tau',\tau}^s = T_{\tau,\tau'}^s$. Le premier membre de (28) devient alors identique à la partie imaginaire $\text{Im } T_{\tau',\tau}^s(s,t)$.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{4\pi} d\theta'_s \int_0^{4\pi} d\theta_s \varphi(\theta'_s)^* \text{Abs}_s T_{\tau,\tau}^s(s,t) \varphi(\theta_s) = \\
 & = \sum_N \left| \int_0^{4\pi} d\theta_s \langle N|T|P, \vec{n}, \theta_s, \tau \rangle \varphi(\theta_s) \right|^2 \\
 & \geq 0 .
 \end{aligned} \tag{30}$$

Ceci montre que la partie absorptive de l'amplitude de transversité diagonale $T_{\tau\tau}^s$ est une fonction de type positif sur le groupe des rotations du plan (plus exactement sur le groupe de recouvrement à deux feuillets du groupe des rotations du plan, lorsque σ est demi-entier).

Revenons alors à l'amplitude diagonale $M_{\tau,\tau}$ définie par (23,a) et (24,a) :

$$M_{\tau,\tau} = \vartheta^{2|\tau|} \begin{pmatrix} 1 \\ \text{ou} \\ \sqrt{\Psi} \end{pmatrix} \left(T_{\tau,\tau}^s + T_{-\tau,-\tau}^s \right) . \tag{31}$$

Sa partie absorptive dans la voie s s'écrit, en tenant compte de la prescription définissant celle des amplitudes non régularisées $T_{\tau,\tau}^s$ et $T_{-\tau,-\tau}^s$:

$$\text{Abs}_s M_{\tau,\tau} = \vartheta^{2|\tau|} \begin{pmatrix} 1 \\ \text{ou} \\ \sqrt{\Psi} \end{pmatrix} \text{Abs}_s \left(T_{\tau,\tau}^s + T_{-\tau,-\tau}^s \right) . \tag{32}$$

Il apparaît immédiatement que lorsque σ est entier, $\text{Abs}_s M_{\tau,\tau}$ qui est, au facteur $\vartheta^{2|\tau|}$ près (facteur indépendant de θ_s), la somme de deux amplitudes de type positif $\text{Abs}_s T_{\tau,\tau}^s$ et $\text{Abs}_s T_{-\tau,-\tau}^s$, est elle-même de type positif. Lorsque σ est demi-entier, une partie de la dépendance en θ_s de $\text{Abs}_s M_{\tau,\tau}$ est contenue dans le facteur $\sqrt{\Psi}$, car :

$$\sqrt{\Psi} = \vartheta \cos \frac{\theta_s}{2} . \tag{33}$$

Mais $\cos \frac{\theta_s}{2}$ est elle-même de type positif*. Le produit de deux fonctions de type positif étant encore de type positif*, on en déduit que pour σ demi-entier, $\text{Abs}_s M_{\tau,\tau}$ est aussi de type positif**.

*voir appendice B

**non seulement sur l'intervalle $(0,4\pi)$ mais en fait sur $(0,2\pi)$, car, sans singularité cinématique, $\text{Abs}_s M_{\tau,\tau}$ est une fonction de période 2π en θ_s .

Par conséquent, que σ soit entier ou demi-entier, la partie absorptive dans la voie s de l'amplitude diagonale $M_{\tau,\tau}$ est de type positif. Comme elle est analytique dans l'ellipse de Lehmann (pas de singularité cinématique), elle possède, d'après le théorème 4 de l'appendice B, les propriétés de positivité (12,a) de Martin.

Il nous reste à démontrer qu'il en est de même dans la voie u . Pour cela, il nous faut tout d'abord exprimer $M_{\tau,\tau}$ en fonction des amplitudes de transversité $T_{\tau',\tau}^u$ dans la voie u . D'après Comonave, le croisement des amplitudes de transversité s'écrit :

$$T_{\tau',\tau}^s = (-)^{\tau+\tau'} e^{i(\tau+\tau')\chi} T_{-\tau',-\tau}^u, \quad (34)$$

où χ , l'angle de croisement associé à la particule A , est donné par :

$$\begin{aligned} \cos \chi &= \frac{(s+m^2-\mu^2)(u+m^2-\mu^2)-4m^2(m^2-\mu^2)}{2U} \\ \sin \chi &= - \frac{2m\sqrt{-t}\psi}{2U} \end{aligned} \quad (35)$$

De (34) on tire aisément la nouvelle expression de l'amplitude $M_{\tau,\tau}$:

$$M_{\tau,\tau} = (-2)^{2|\tau|} \left(\frac{1}{\sqrt{\psi}} \right) \left\{ e^{-2i\tau\chi} T_{\tau,\tau}^u + e^{2i\tau\chi} T_{-\tau,-\tau}^u \right\}. \quad (36)$$

Sa partie absorptive dans la voie u s'écrit alors :

$$\text{Abs}_u M_{\tau,\tau} = (-2)^{2|\tau|} \left(\frac{1}{\sqrt{\psi}} \right) \left\{ e^{-2i\tau\chi} \text{Abs}_u T_{\tau,\tau}^u + e^{2i\tau\chi} \text{Abs}_u T_{-\tau,-\tau}^u \right\}. \quad (37)$$

Dans cette expression apparaissent des parties absorptives d'amplitudes de transversité diagonales qui (comme précédemment pour les amplitudes $T_{\tau,\tau}^s$ dans la voie s) sont des fonctions de type positif en θ_u . Il apparaît aussi des facteurs $e^{\pm 2i\tau\chi}$ dont la dépendance en θ_u est compliquée. Cependant, des formules (35), on tire aisément la relation suivante :

$$e^{\pm i\chi} = \frac{u}{-s} \left\{ \frac{(\sqrt{u+m})^2 - \mu^2}{4u} e^{\pm i\theta_u} + \frac{(\sqrt{u-m})^2 - \mu^2}{4u} e^{\mp i\theta_u} + \frac{u-m^2+\mu^2}{2u} \right\} \quad (38)$$

La quantité entre crochets dans le second membre possède la propriété remarquable d'être une fonction de type positif en θ_u . En effet, $e^{i\theta_u}$ et $e^{-i\theta_u}$ sont de type positif*, et les coefficients de $e^{\pm i\theta_u}$ et $e^{\mp i\theta_u}$ ainsi que le troisième terme indépendant de θ_u , sont tous les trois positifs dans la région physique de la voie u ($\sqrt{u} > m+\mu$). Donc $(-s e^{\pm i\chi})$ est une fonction de type positif. Elevant cette quantité à la puissance entière $2|\tau|$, on obtient que $(-s)^{2|\tau|} e^{\pm 2i\tau\chi}$ est aussi de type positif en θ_u .

D'autre part, $\sqrt{\Psi} = u \cos \frac{\theta}{2}$ est encore de type positif. Finalement, la partie absorptive dans la voie u de l'amplitude $M_{\tau,\tau}$ apparaît dans l'équation (37), comme la somme de produits de fonctions de type positif : c'est elle-même une fonction de type positif. Comme elle est analytique en $\cos \theta_u$ dans l'ellipse de Lehmann, elle possède, d'après le théorème 4 de l'appendice B, les propriétés de positivité (12,b) de Martin.

Nous avons donc montré que l'amplitude $M_{\tau,\tau}$ satisfait toutes les hypothèses du théorème de Martin. En conséquence, elle est analytique dans un domaine $\mathcal{D}(R) =$ produit quasi-topologique ($|t| < R$) $\otimes$ (s dans un plan coupé)**. Elle est de plus bornée polynômialement en s à t fixé, et satisfait une relation de dispersion en s , avec éventuellement pour t complexe une soustraction de plus que pour $t = 0$.

A ce point, nous avons partiellement atteint le résultat cherché. Partiellement seulement, car il n'y a que $\sigma+1$ (si σ est entier) ou $\sigma+\frac{1}{2}$ (si σ est demi-entier) amplitudes $M_{\tau\tau}$, alors que la diffusion considérée est décrite par $(2\sigma+1)^2$ amplitudes. Nous allons montrer que l'analyticité dans le domaine $\mathcal{D}(R)$ des amplitudes diagonales $M_{\tau\tau}$ entraîne celle de toutes les autres amplitudes régularisées $M_{\tau',\tau}$ et $N_{\tau',\tau}$, et de façon plus générale, celle de toute amplitude cinématiquement régulière. Pour cela, nous ferons usage du théorème suivant, démontré dans l'appendice B (théorème 5) :

* voir appendice B

** R pourrait éventuellement dépendre de τ . Dans ce cas, nous appellerions R le plus petit des nombres $R(\tau)$.

Soient $f_1(\theta), f_2(\theta) \dots f_N(\theta)$, N fonctions définies et continues sur le cercle, de type positif sur le groupe du cercle, et telles que leur somme soit une fonction $F(\cos\theta)$, analytique en $\cos\theta$ dans une ellipse $\mathcal{E}$ de foyers $\cos\theta = \pm 1$. Alors $f_1(\theta), f_2(\theta) \dots f_N(\theta)$ sont de la forme suivante :

$$f_j(\theta) = g_j(\cos\theta) + \sin\theta h_j(\cos\theta) \quad (j = 1, 2 \dots N) \quad (39)$$

où les fonctions $g_j(\cos\theta)$ et $h_j(\cos\theta)$ sont analytiques en $\cos\theta$ dans l'ellipse $\mathcal{E}$, avec :

$$\begin{aligned} F(\cos\theta) &= \sum_{j=1}^N g_j(\cos\theta) \\ \sum_{j=1}^N h_j(\cos\theta) &= 0 \end{aligned} \quad (40)$$

De plus, à l'intérieur de $\mathcal{E}$, on a les bornes suivantes :

$$\begin{aligned} |g_j(\cos\theta)| &\leq F(\cos(i\operatorname{Im}\theta)) \\ |h_j(\cos\theta)| &\leq F'(\cos(i\operatorname{Im}\theta)) \end{aligned} \quad (41)$$

Avant de faire usage de ce théorème, posons, pour simplifier l'écriture :

$$\mathcal{C}_{\tau', \tau}^s = \mathcal{J}^{|\tau|+|\tau'|} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \text{ou} \\ \sqrt{\psi} \end{array} \right) T_{\tau', \tau}^s, \quad (42)$$

de sorte que

$$M_{\tau', \tau} = \mathcal{C}_{\tau', \tau}^s + (-)^{\tau' - \tau} \mathcal{C}_{-\tau', -\tau}^s \quad (43, a)$$

$$N_{\tau', \tau} = \left[\mathcal{C}_{\tau', \tau}^s - (-)^{\tau' - \tau} \mathcal{C}_{-\tau', -\tau}^s \right] / \sqrt{-t\psi} \quad (43, b)$$

De l'analyticité de $M_{\tau, \tau}(s, t)$ dans le cercle $|t| < R$, on déduit que $\operatorname{Abs}_s M_{\tau, \tau}(s, t)$ est analytique en $\cos\theta_s$ dans l'ellipse $\mathcal{E}(\psi_R)$, de foyers ± 1 , passant par le point* :

$$\cos\theta_s = \cos i\psi_R \equiv 1 + \frac{2Rs}{\mathcal{J}^2} \quad (44)$$

* En effet, $\operatorname{Abs}_s M_{\tau, \tau}$ est une fonction de type positif qui admet un développement de la forme $\sum_{p \text{ entier} \geq 0} a_p \csc p\theta_s$, où tous les a_p sont positifs. Sur

Utilisant le théorème ci-dessus, on obtient alors que les parties absorptives $\text{Abs}_s \mathcal{C}_{\pm\tau, \pm\tau}^s$ peuvent se mettre sous la forme :

$$\text{Abs}_s \mathcal{C}_{\pm\tau, \pm\tau}^s = g_\tau(\cos\theta_s) \pm \sin\theta_s h_\tau(\cos\theta_s) \quad , \quad (45)$$

où $g_\tau(\cos\theta_s)$ et $h_\tau(\cos\theta_s)$ sont des fonctions analytiques en $\cos\theta_s$ dans l'ellipse $\mathcal{E}(\psi_R)$. De plus, des inégalités (41), on déduit que g_τ et h_τ sont, à t fixé, bornées polynômialement en s (de façon plus précise, g_τ et h_τ sont des distributions tempérées en s).

De là, il résulte que la fonction :

$$\begin{aligned} \text{Abs}_s \text{Trace } \mathcal{C}^s &\equiv \sum_{\tau=-\sigma}^{\sigma} \text{Abs}_s \mathcal{C}_{\tau, \tau}^s \\ &= \sum_{\tau=-\sigma}^{\sigma} g_\tau(\cos\theta_s) \quad , \end{aligned} \quad (46)$$

est analytique en $\cos\theta_s$ dans $\mathcal{E}(\psi_R)$, et bornée polynômialement en s , à t fixé. Utilisons l'invariance cyclique de la trace pour écrire :

$$\begin{aligned} \text{Abs}_s \text{Trace } \mathcal{C}^s &= \text{Abs}_s \text{Trace } (R^{-1} \mathcal{C}^s R) \\ &= \sum_{\lambda=-\sigma}^{\sigma} \text{Abs}_s \left(\sum_{\tau', \tau} R_{\lambda\tau'}^{-1} \mathcal{C}_{\tau', \tau}^s R_{\tau\lambda} \right) \quad , \end{aligned} \quad (47)$$

où R est une matrice numérique $(2\sigma+1) \times (2\sigma+1)$, non singulière, arbitraire. Cette nouvelle expression de la trace fait apparaître de nouvelles amplitudes diagonales $(R^{-1} \mathcal{C}^s R)_{\lambda\lambda}$, qui, comme les amplitudes $\mathcal{C}_{\tau\tau}^s$, ont des parties absorptives dans la voie s qui sont de type positif en θ_s . Pour le démontrer, il suffit de réécrire les équations (30) en projetant la matrice T non plus entre les états de transversité $|\tau\rangle$, mais entre des états de la forme $\sum_{\tau} |\tau\rangle \delta^{|\tau|} R_{\tau\lambda}$, l'essentiel pour obtenir la positivité, étant que les états initial et final soient les mêmes

* une ellipse donnée de foyers ± 1 , ce développement atteint son maximum sur l'axe réel positif. Par conséquent, il converge dans l'ellipse de foyers ± 1 (voir théorème 9.1.1 de la référence [17]), qui s'appuie sur la première singularité rencontrée sur l'axe réel positif. Cette singularité est nécessairement au point $\cos\theta_s = \cos i\psi_R$, ou au-delà. D'autre part, la convergence à l'intérieur de $\mathcal{E}(\psi_R)$ est uniforme, donc la série représente une fonction analytique de $\cos\theta_s$ dans $\mathcal{E}(\psi_R)$.

Utilisant à nouveau le théorème 5 de l'appendice B, on en conclut que la partie absorptive $\text{Abs}_s (R^{-1} \mathcal{C}^s R)_{\lambda\lambda}$ peut se mettre, quelle que soit la matrice R , sous la forme $g(\cos\theta) + \sin\theta h(\cos\theta)$. Choisissons la matrice R de telle sorte que l'état $\sum_{\tau} |\tau\rangle \mathcal{J}^{|\tau|} R_{\tau\lambda}$ ne fasse intervenir que les deux hélicités τ et τ' :

$$\text{Abs}_s (R^{-1} \mathcal{C}^s R)_{\lambda\lambda} = \text{cste Abs}_s \left\{ \mathcal{C}_{\tau,\tau}^s + \alpha \mathcal{C}_{\tau',\tau}^s + \alpha^* \mathcal{C}_{\tau,\tau'}^s + |\alpha|^2 \mathcal{C}_{\tau',\tau'}^s \right\}. \quad (48)$$

Les parties absorptives de $\mathcal{C}_{\tau,\tau}^s$ et $\mathcal{C}_{\tau',\tau}^s$ sont déjà de la forme $g+h\sin\theta$. Il doit donc en être de même de $\text{Abs}_s (\alpha \mathcal{C}_{\tau',\tau}^s + \alpha^* \mathcal{C}_{\tau,\tau'}^s)$. Comme cela est vrai quel que soit α complexe, toutes les parties absorptives $\text{Abs}_s \mathcal{C}_{\tau',\tau}^s$ sont de la forme $g+h\sin\theta$:

$$\text{Abs}_s \mathcal{C}_{\tau',\tau}^s = g_{\tau',\tau}(\cos\theta_s) + \sin\theta h_{\tau',\tau}(\cos\theta_s). \quad (49)$$

Revenons aux équations (43), et notons que, à s fixé au-dessus du seuil $(m+\mu)^2$, $\sqrt{-t}\psi$ est proportionnel à $\sin\theta_s$:

$$\sqrt{-t}\psi = \frac{\mathcal{J}^2}{2\sqrt{s}} \sin\theta_s. \quad (50)$$

Or $\sin\theta_s$ est une fonction analytique de $\cos\theta_s$ avec deux points de branchement en $\cos\theta_s = \pm 1$. Les formules (43) et (49) ne sont alors compatibles avec la régularité en $\cos\theta_s = \pm 1$ des parties absorptives des amplitudes M et N , que si l'on a :

$$\begin{aligned} g_{\tau',\tau}(\cos\theta) &= (-)^{\tau'-\tau} g_{-\tau',-\tau}(\cos\theta) \\ h_{\tau',\tau}(\cos\theta) &= - (-)^{\tau'-\tau} h_{-\tau',-\tau}(\cos\theta). \end{aligned} \quad (51)$$

Il en résulte immédiatement que* :

*Remarquons que les équations (51) réduisent le nombre des fonctions indépendantes g et h à $(2\sigma+1)^2$, comme cela doit être.

$$\begin{aligned} \text{Abs}_s M_{\tau', \tau} &= 2 g_{\tau', \tau}(\cos \theta_s) \\ \text{Abs}_s N_{\tau', \tau} &= \frac{4\sqrt{s}}{s^2} h_{\tau', \tau}(\cos \theta_s) \end{aligned} \quad (52)$$

ce qui montre que les parties absorptives dans la voie s des amplitudes M et N , et de façon plus générale, celle de toute amplitude cinématiquement régulière, sont à s fixé $> (m+\mu)^2$, analytiques en $\cos \theta_s$ dans l'ellipse $\mathcal{E}(\psi_R)$, et bornées polynômialement en s à t fixé (distributions tempérées).

Bien entendu, les parties absorptives dans la voie u possèdent les mêmes propriétés : analyticité dans l'ellipse $\mathcal{E}(\psi_R)$ du plan complexe de la variable $\cos \theta_u$, et borne polynômiale en u (ou en s) à t fixé.

Or nous savons que toute amplitude cinématiquement régulière $F(s, t)$, satisfait, à t fixé réel négatif ($-t_M < t \leq 0$), une relation de dispersion en s , qui apparaît, aux termes de soustraction près, comme une somme de deux intégrales sur les parties absorptives dans les voies s et u . Ces intégrales, avec suffisamment de soustractions, sont analytiquement prolongeables dans le cercle $|t| < R$. Les termes de soustraction eux-mêmes sont analytiques^[9] dans un certain voisinage $|t| < R'$. Appelons à nouveau R le plus petit des deux nombres R et R' . La relation de dispersion prolongée dans le cercle $|t| < R$, fournit le prolongement analytique de l'amplitude $F(s, t)$ dans le domaine $\mathcal{D}(R)$.

Ceci achève l'extension du théorème de Martin à la diffusion élastique de deux particules de spins 0 et σ .

II - DIFFUSION ELASTIQUE DE DEUX PARTICULES DE SPINS σ ET σ'

Cette fois-ci la particule B a un spin σ' quelconque, et nous appellerons κ et κ' ses transversités initiale et finale. La diffusion $A+B \rightarrow A+B$ est décrite par les amplitudes de transversité $T_{\tau', \kappa'; \tau, \kappa}^s(s, t)$. Les différentes étapes du paragraphe précédent se retrouvent ici sans changement essentiel.

Posons :

$$T_{\tau', \kappa'; \tau, \kappa}^s = e^{| \tau | + | \kappa | + | \tau' | + | \kappa' |} \left(\frac{1}{\sqrt{\psi}} \right) T_{\tau', \kappa'; \tau, \kappa}^s, \quad (53)$$

avec le facteur 1 ou $\sqrt{t}$ suivant que $\sigma + \sigma'$ est entier ou demi-entier.
D'après Comonave, les amplitudes :

$$\begin{aligned} M_{\tau', \kappa'; \tau, \kappa} &= \mathcal{C}_{\tau', \kappa'; \tau, \kappa}^S + (-)^{\tau + \kappa - \tau' - \kappa'} \mathcal{C}_{-\tau', -\kappa'; -\tau, -\kappa}^S \\ N_{\tau', \kappa'; \tau, \kappa} &= \left[\mathcal{C}_{\tau', \kappa'; \tau, \kappa}^S - (-)^{\tau + \kappa - \tau' - \kappa'} \mathcal{C}_{-\tau', -\kappa'; -\tau, -\kappa}^S \right] / \sqrt{-t} \end{aligned} \quad (54)$$

sont cinématiquement régulières.

L'analyticité hermitique nous apprend que :

$$T_{\tau', \kappa'; \tau, \kappa}^S(s + i\varepsilon, t) = T_{\tau, \kappa; \tau', \kappa'}^S(s - i\varepsilon, t)^* \quad (55)$$

ce qui permet d'écrire l'unitarité dans la voie s sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} \left[T_{\tau', \kappa'; \tau, \kappa}^S(s + i\varepsilon, t) - T_{\tau', \kappa'; \tau, \kappa}^S(s - i\varepsilon, t) \right] &\equiv \text{Abs}_s T_{\tau', \kappa'; \tau, \kappa}^S(s, t) \\ &= \sum_N \langle P, \vec{n}, \theta_s', \tau', \kappa' | T^\dagger | N \rangle \langle N | T | P, \vec{n}, \theta_s, \tau, \kappa \rangle \end{aligned} \quad (56)$$

On en déduit immédiatement que la partie absorptive des amplitudes diagonales $T_{\tau, \kappa; \tau, \kappa}^S$ est de type positif en θ_s .

Le croisement entre les voies s et u s'écrit :

$$T_{\tau', \kappa'; \tau, \kappa}^S = (-)^{\tau + \kappa + \tau' + \kappa'} e^{i(\tau + \tau')\chi + i(\kappa + \kappa')\varphi} T_{-\tau', -\kappa'; -\tau, -\kappa}^u \quad (57)$$

où φ , l'angle de croisement associé à la particule B , est donné par des formules analogues à (35), dans lesquelles l'on a simplement échangé les masses m et μ . Il s'ensuit que $(-1)^{2|\kappa|} e^{\pm 2i\kappa\varphi}$ est de type positif. Il n'y a alors aucune difficulté à montrer que les amplitudes diagonales $M_{\tau, \kappa; \tau, \kappa}$ satisfont les hypothèses du théorème de Martin, donc qu'elles sont analytiques dans un domaine $\mathcal{D}(R)$. Enfin, grâce au théorème 5 de l'appendice B, cette propriété s'étend aisément à toutes les amplitudes M et N .

En définitive :

Toute amplitude cinématiquement régulière, décrivant la diffusion élastique de deux particules stables A et B, de masses m et μ non nulles, et de spins σ et σ' quelconques, satisfait une relation de dispersion en s , à transfert t fixé dans le cercle $|t| < R$, avec un nombre fini de soustractions*.

*Rappelons que dans certains cas défavorables (voir page 8), l'on n'a pas tout à fait une relation de dispersion, car il faut enlever du plan coupé en s , une région finie, qui ne touche pas les coupures physiques.

CHAPITRE IV

BORNES DE FROISSART

La démonstration par Martin^[4] des bornes de Froissart dans le cas scalaire, fait appel, nous l'avons vu, au développement en ondes partielles de l'amplitude de diffusion. Pour généraliser ce résultat aux particules de spins non nuls, nous utiliserons les amplitudes d'hélicité, dont le développement en ondes partielles est bien connu^[12] *.

Appelons λ_1 et λ_2 les hélicités initiales, μ_1 et μ_2 les hélicités finales des particules A et B. L'amplitude d'hélicité $M_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^s$ dans la voie s s'écrit :

$$M_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^s(s, t) = \sum_J (2J+1) f_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^J(s) d_{\lambda, \mu}^J(\theta_s) \quad , \quad (58)$$

où $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, $\mu = \mu_1 - \mu_2$, et les $d_{\lambda, \mu}^J(\theta_s)$ sont les fonctions bien connues du groupe des rotations.

Les amplitudes $M_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^s$ et les ondes partielles $f_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^J$ ont des singularités cinématiques. Nous définirons leurs parties absorptives dans la voie s en suivant la prescription donnée précédemment pour de telles fonctions (voir page 14). Dans ces conditions, les $d_{\lambda, \mu}^J(\theta_s)$ n'ayant que des singularités cinématiques (pas de singularité dynamique), on peut écrire :

$$\text{Abs}_s M_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^s(s, t) = \sum_J (2J+1) \text{Abs} f_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^J(s) \cdot d_{\lambda, \mu}^J(\theta_s) \quad . \quad (59)$$

La condition d'unitarité pour les ondes partielles a la forme suivante :

*Les amplitudes de transversité ont un développement en ondes partielles très compliqué.

$$\text{Abs } f_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^J(s) = \sum_N \langle \mu_1, \mu_2 | T_J^\dagger(s) | N \rangle \langle N | T_J(s) | \lambda_1, \lambda_2 \rangle . \quad (60)$$

En particulier, dans la région élastique* :

$$\text{Abs } f_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^J(s) = \frac{2q_s}{\sqrt{s}} \sum_{\nu_1, \nu_2} f_{\nu_1, \nu_2; \mu_1, \mu_2}^J(s)^* f_{\nu_1, \nu_2; \lambda_1, \lambda_2}^J(s) . \quad (61)$$

Nous en retiendrons essentiellement les inégalités suivantes :

$$\left| f_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^J(s) \right|^2 \leq \frac{\sqrt{s}}{2q_s} \text{Abs } f_{\lambda_1, \lambda_2; \lambda_1, \lambda_2}^J(s) \leq \frac{s}{4q_s^2} . \quad (62)$$

L'analyticité dans le domaine de Martin $\mathcal{D}(R)$ de toute amplitude cinématiquement régulière, entraîne que les développements en ondes partielles (58) et (59) convergent pour tout $\cos \theta_s$ complexe dans l'ellipse $\mathcal{E}(\psi_R)$, de foyers ± 1 , passant par le point $\cos \theta_s = \cos i\psi_R$ (voir équation (44)). Ils convergent en particulier au point $\cos i\psi_R'$ correspondant à $t = R - \varepsilon$, où ε est un nombre positif aussi petit que l'on veut. Mais en ce point, tous les termes du développement en ondes partielles de la partie absorptive d'une amplitude diagonale sont positifs :

$$\text{Abs}_s M_{\lambda_1, \lambda_2; \lambda_1, \lambda_2}^S(s, t=R-\varepsilon) = \sum_J (2J+1) \text{Abs } f_{\lambda_1, \lambda_2; \lambda_1, \lambda_2}^J(s) \cdot d_{\lambda\lambda}^J(i\psi_R') . \quad (63)$$

La positivité de $\text{Abs } f_{\lambda_1, \lambda_2; \lambda_1, \lambda_2}^J(s)$ vient de l'unitarité (inégalités (62)), celle de $d_{\lambda\lambda}^J(i\psi_R')$ est montrée dans l'appendice C .

De la borne polynômiale :

$$\left| \text{Abs}_s M_{\lambda_1, \lambda_2; \lambda_1, \lambda_2}^S(s, t) \right| \leq \text{Cste } s^N , \quad (64)$$

valable pour tout s supérieur à $(m+\mu)^2$, et tout t dans le cercle $|t| < R$, on déduit alors :

$$0 \leq \text{Abs } f_{\lambda_1, \lambda_2; \lambda_1, \lambda_2}^J(s) \leq \frac{\text{Cste } s^N}{(2J+1) d_{\lambda, \lambda}^J(i\psi_R')} . \quad (65)$$

* La formule (61) fixe la normalisation des amplitudes.

Or $d_{\lambda, \lambda}^J(i\psi'_R)$ est une fonction exponentiellement croissante de J . De façon précise, $d_{\lambda, \lambda}^J(i\psi'_R)$ admet la borne inférieure suivante (voir appendice C) :

$$d_{\lambda, \lambda}^J(i\psi'_R) \geq \frac{\Phi}{\pi} \left(\text{Ch } \psi'_R + \cos \Phi \text{ Sh } \psi'_R \right)^{J-|\lambda|} \left(\text{Ch } \frac{\psi'_R}{2} \right)^{|\lambda|}, \quad (66)$$

où Φ est un angle quelconque compris entre 0 et π . Il en résulte que la partie absorptive $\text{Abs } f_{\lambda_1, \lambda_2; \lambda_1, \lambda_2}^J$, déjà bornée par $\sqrt{s}/2q_s$ à cause de l'unitarité (équation (62)), se met à décroître exponentiellement en J , dès que J est supérieur à $J_{\max}$, avec [18] :

$$J_{\max} = \frac{(N-\frac{1}{2}) q_s \log q_s}{\sqrt{R}} \quad (67)$$

Il en est de même, bien entendu, pour les ondes partielles $f_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^J$ elles-mêmes, à cause des inégalités (62). Revenant alors à la région physique (θ_s réel), où les $d_{\lambda, \mu}^J(\theta_s)$ sont bornés en module par 1, on en déduit, comme dans le cas scalaire (voir l'introduction), la borne asymptotique :

$$\begin{aligned} \left| M_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^s(s, t) \right| &\leq \sum_J (2J+1) \left| f_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^J(s) \right| \cdot \left| d_{\lambda, \mu}^J(\theta_s) \right| \\ &\leq \sum_{J \leq J_{\max}} (2J+1) \sim J_{\max}^2, \end{aligned} \quad (68)$$

c'est-à-dire :

$$\left| M_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^s(s, t) \right| \leq \frac{(N-\frac{1}{2})^2}{4R} s \log^2 s. \quad (69)$$

Ceci est la généralisation de la borne de Froissart à la diffusion de particules de spins non nuls.

Pour les parties absorptives, on obtient une borne un peu meilleure [18] :

$$\left| \text{Abs } M_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^s(s, t) \right| \leq \frac{(N-1)^2}{4R} s \log^2 s \quad (70)$$

Montrons maintenant que, quelles que soient les hélicités initiales et finales, N est égal à 2 .

Rappelons tout d'abord que les amplitudes de transversité $T_{\tau, \kappa'; \tau, \kappa}^S$ sont des combinaisons linéaires à coefficients constants d'amplitudes d'hélicité^[13] * :

$$T_{\tau, \kappa'; \tau, \kappa}^S = \sum_{\lambda, \lambda'; \mu, \mu'} R_{\tau, \lambda}^{\sigma \dagger} R_{\kappa', \mu}^{\sigma' \dagger} M_{\lambda, \mu'; \lambda, \mu}^S R_{\lambda, \tau}^{\sigma} R_{\mu, \kappa}^{\sigma'} . \quad (71)$$

Elles satisfont donc aussi la borne de Froissart. L'amplitude diagonale cinématiquement régulière $M_{\tau, \kappa; \tau, \kappa}$ définie par (54), est alors bornée par :

$$\begin{cases} s^{2|\tau|+2|\kappa|+1} \log^2 s & \text{si } \sigma+\sigma' \text{ est entier} \\ s^{2|\tau|+2|\kappa|+2} \log^2 s & \text{si } \sigma+\sigma' \text{ est demi-entier} . \end{cases}$$

Elle satisfait une relation de dispersion pour $-t_M < t \leq 0$ (et en particulier vers l'avant à $t = 0$), avec $2|\tau|+2|\kappa|+2$ soustractions si $\sigma+\sigma'$ est entier, et $2|\tau|+2|\kappa|+3$ soustractions si $\sigma+\sigma'$ est demi-entier. Dans les deux cas, le nombre de soustractions est pair. Il est alors le même, d'après le théorème de Martin, pour les relations de dispersion écrites à transfert t fixé dans le cercle $|t| < R$. Donc, pour $|t| < R$ et $s \rightarrow +\infty$:

$$\begin{cases} s^{-(2|\tau|+2|\kappa|+2)} \text{Abs}_s M_{\tau, \kappa; \tau, \kappa} \rightarrow 0 & \text{si } \sigma+\sigma' \text{ est entier} \\ s^{-(2|\tau|+2|\kappa|+3)} \text{Abs}_s M_{\tau, \kappa; \tau, \kappa} \rightarrow 0 & \text{si } \sigma+\sigma' \text{ est demi-entier} . \end{cases} \quad (72)$$

D'après le théorème 5 de l'appendice B, chacune des parties absorptives (de type positif) $\text{Abs}_s \mathcal{C}_{\tau, \kappa; \tau, \kappa}^S$ et $\text{Abs}_s \mathcal{C}_{-\tau, -\kappa; -\tau, -\kappa}^S$ satisfait à son tour les bornes (72), donc :

$$s^{-2} \text{Abs}_s T_{\tau, \kappa; \tau, \kappa}^S \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } s \rightarrow +\infty, \quad |t| < R . \quad (73)$$

Appliquant une fois de plus le théorème 5 de l'appendice B à l'amplitude :

* $R_{\lambda, \tau}^{\sigma}$ est la matrice $\mathcal{D}_{\lambda, \tau}^{\sigma}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ représentant la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ autour de Ox .

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\Psi}} \right) \sum_{\tau, \kappa} \text{Abs}_s T_{\tau, \kappa; \tau, \kappa}^s = \left(\frac{1}{\sqrt{\Psi}} \right) \sum_{\lambda, \mu} \text{Abs}_s M_{\lambda, \mu; \lambda, \mu}^s, \quad (74)$$

qui est cinématiquement régulière en $\cos \theta_s$, on obtient que :

$$s^{-2} \text{Abs}_s M_{\lambda, \mu; \lambda, \mu}^s \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad s \rightarrow +\infty, \quad |t| < R. \quad (75)$$

Par conséquent, on peut prendre N égal à 2 dans l'inégalité (64).
Finalement, les bornes (69) et (70) deviennent :

$$\left| M_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^s(s, t) \right| < \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{4R} s \log^2 s \quad (76, a)$$

$$\left| \text{Abs}_s M_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^s(s, t) \right| < \frac{1}{4R} s \log^2 s. \quad (76, b)$$

Ces résultats sont valables pour tout transfert t réel sur le segment $-t_M < t \leq 0$, y compris à l'avant $t = 0$. A transfert t strictement négatif, les bornes (76) peuvent être améliorées en utilisant le comportement asymptotique de $d_{\lambda, \mu}^J(\theta_s)$ lorsque $J \rightarrow \infty$ (voir appendice C) :

$$\left| d_{\lambda, \mu}^J(\theta_s) \right| \sim \frac{\text{Cste}}{\sqrt{J} \sin \theta_s}. \quad (77)$$

Tenant compte de l'expression (22) de $\sin \frac{\theta}{2}$ en fonction de s et t , ceci devient :

$$\left| d_{\lambda, \mu}^J(\theta_s) \right| \sim \frac{\text{Cste}}{\sqrt{J}} \left(\frac{s}{-t} \right)^{1/4}. \quad (78)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \left| M_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^s(s, t) \right| &< \text{Cste} \left(\frac{s}{-t} \right)^{1/4} \sum_{J \leq J_{\max}} \frac{2J+1}{\sqrt{J}} \\ &\leq \text{Cste} \left(\frac{s}{-t} \right)^{1/4} J_{\max}^{3/2} \\ &< \frac{\text{Cste}}{(-t)^{1/4}} s \log^{3/2} s \quad (t \text{ fixé } < 0). \end{aligned} \quad (79)$$

A angle θ_s fixé, la forme asymptotique (77) donne directement :

$$\begin{aligned}
 \left| M_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^s(s, t) \right| &< \frac{\text{Cste}}{\sqrt{\sin \theta_s}} \sum_{J \leq J_{\max}} \frac{2J+1}{\sqrt{J}} \\
 &\sim \frac{\text{Cste}}{\sqrt{\sin \theta_s}} J_{\max}^{3/2} \\
 &\sim \frac{\text{Cste}}{\sqrt{\sin \theta_s}} s^{3/4} \log^{3/2} s \quad . \quad (\theta_s \text{ fixé } \neq 0 \text{ et } \pi)
 \end{aligned} \tag{80}$$

Comme dans le cas scalaire, cette dernière borne ne peut être atteinte que pour des valeurs isolées de l'angle θ_s .

Enfin, notons que le théorème optique :

$$\text{Abs}_s M_{\lambda_1, \lambda_2; \lambda_1, \lambda_2}^s(s, \theta) = \frac{s}{16\pi} \sigma_{\lambda_1, \lambda_2}^{\text{tot}}(s) \quad , \tag{81}$$

et la borne (76,b), donnent pour la section efficace totale $\sigma_{\lambda_1, \lambda_2}^{\text{tot}}(s)$ la même borne asymptotique que dans le cas scalaire :

$$\sigma_{\lambda_1, \lambda_2}^{\text{tot}}(s) \sim \frac{4\pi}{R} \log^2 s \quad . \tag{82}$$

CHAPITRE V

RELATIONS DE SUPERCONVERGENCE

Avec les bornes de Froissart démontrées dans le chapitre précédent, nous avons maintenant tous les éléments pour montrer l'existence d'amplitudes superconvergentes, par la méthode de L. Trueman^[6]. Rappelons que cette méthode fait appel aux amplitudes d'hélicité $M_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^t$ dans la voie t , c'est-à-dire dans la voie $A + \bar{A} \rightarrow B + \bar{B}$. Les indices λ_1 et λ_2 sont les hélicités des particules A et $\bar{A}$, μ_1 et μ_2 celles des particules B et $\bar{B}$.

Avec Comonave, définissons les amplitudes partiellement régularisées :

$$\hat{M}_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^t = \frac{M_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^t}{\left(\sin \frac{\theta_t}{2}\right)^{|\lambda - \mu|} \left(\cos \frac{\theta_t}{2}\right)^{|\lambda + \mu|}}, \quad (83)$$

où $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, $\mu = \mu_1 - \mu_2$, et où θ_t , l'angle de réaction dans le repère du centre de masse de la voie t , est donné par :

$$\begin{cases} \cos \theta_t = \frac{s - u}{\sqrt{(t - 4m^2)(t - 4\mu^2)}} \\ \sin \theta_t = \frac{2\sqrt{-\psi}}{\sqrt{(t - 4m^2)(t - 4\mu^2)}} \end{cases} \quad (84)$$

Les amplitudes $\hat{M}^t$ sont, à t fixé, cinématiquement régulières en s . De plus, d'après la table II.9 de Comonave, les amplitudes :

$$\begin{cases} \hat{M}_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^t & \text{lorsque } \lambda + \mu \text{ est pair} & (85, a) \\ \frac{1}{\sqrt{-t}} \hat{M}_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^t & \text{lorsque } \lambda + \mu \text{ est impair} & (85, b) \end{cases}$$

sont cinématiquement régulières en t au voisinage de $t = 0$. Cependant, il leur reste en général des singularités cinématiques aux seuils $t = 4\mu^2$ et

$t = 4m^2$ de la voie t . Ces singularités sont certainement en dehors du cercle $|t| < R$, aussi, pour le moment, nous ne nous en préoccupons pas. Il nous suffit de savoir, pour obtenir des relations de superconvergence, que les amplitudes (85) satisfont des relations de dispersion en s , à transfert t fixé dans le cercle $|t| < R$.

Cherchons maintenant le comportement asymptotique en s de ces amplitudes, lorsque t est réel et négatif. Les amplitudes d'hélicité M^t dans la voie t s'expriment en fonction des amplitudes d'hélicité M^s dans la voie s , à l'aide d'une matrice de croisement. Tout ce que nous avons besoin de savoir sur cette matrice, est que ses éléments sont des produits de fonctions d de rotations (voir Comonave), dont les arguments sont des angles réels dans la région physique de la voie s . En conséquence, lorsque s et t ont des valeurs réelles physiques, tous les éléments de la matrice de croisement sont bornés par 1 en module, et les amplitudes d'hélicité M^t sont soumises elles-aussi aux bornes de Froissart. De là, remarquant sur les formules (84), que $\sin \frac{\theta_t}{2}$ et $\cos \frac{\theta_t}{2}$ se comportent comme $\sqrt{s}$, on déduit aisément que lorsque s est réel et tend vers $+\infty$:

$$\left| \hat{M}_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^t \right| \lesssim \text{Cste } s^{1-\text{Max}(|\lambda|, |\mu|)} \log^2 s \quad (86)$$

On a bien évidemment la même borne asymptotique lorsque u est réel et tend vers $+\infty$ ($s \rightarrow -\infty$). Le théorème de Phragmen-Lindelöf^[19] l'étend alors à toute direction complexe du plan s .

La borne (86) est le résultat dont nous avons besoin lorsque $\lambda + \mu$ est pair. En revanche, lorsque $\lambda + \mu$ est impair, elle est insuffisante, car elle ne donne aucune information sur l'amplitude (85,b) à transfert nul, à cause du facteur $1/\sqrt{-t}$ qui devient infini. Pour nous en sortir, nous ferons appel à un théorème démontré dans l'appendice D, selon lequel si une fonction $F(s, t)$ est analytique en t dans le cercle $|t| < R$, est bornée par s^N dans $|t| < R$, et par $(s^\alpha \log^\beta s)/t^\lambda$ lorsque $-R < t < 0$, alors, à $t = 0$, elle est bornée par $s^\alpha \log^{\beta+2\lambda} s$. On en déduit que, lorsque $\lambda + \mu$ est impair :

$$\left| \frac{1}{\sqrt{-t}} \hat{M}_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^t \right| \lesssim \text{Cste } s^{1-\text{Max}(|\lambda|, |\mu|)} \log^3 s \quad (87)$$

Ainsi, les amplitudes (85,a) et (85,b) sont respectivement bornées par (86) et (87). Il apparaît immédiatement que lorsque $|\lambda|$ ou $|\mu|$ est strictement supérieur à 2, l'amplitude correspondante est superconvergente (c'est-à-dire tend vers zéro plus vite que $1/|s|$). De façon précise si $N (> 2)$ est le plus grand des deux nombres $|\lambda|$ et $|\mu|$, on obtient $N-2$ relations de superconvergence de la forme :

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \text{ou} \\ 1/\sqrt{-t} \end{array} \right) \left\{ \int_{(m+\mu)^2}^{\infty} ds \cdot s^n \text{Abs}_s \hat{M}_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^t(s, t) - \int_{(m+\mu)^2}^{\infty} du \cdot s^n \text{Abs}_u \hat{M}_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^t(u, t) \right\} = 0 \quad (n = 0, 1, \dots, N-3) \quad (88)$$

Ceci ne peut arriver que si l'un des spins σ ou σ' est au moins égal à $3/2$. Le cas de la diffusion de deux particules de spins 0 et 1 est marginal, et en l'absence de toute information sur la dynamique du système, il n'est pas possible d'obtenir de relation de superconvergence.

Les relations (88) sont le résultat final de ce travail. Elles sont la conséquence des seuls axiomes de la théorie locale des champs.

Toutefois, nous n'avons pas encore montré l'existence d'un ensemble complet d'amplitudes invariantes satisfaisant les bornes (86) et (87), car, ainsi que nous l'avons dit plus haut, les amplitudes (85) ont des singularités cinématiques aux seuils $t = 4\mu^2$ et $4m^2$ de la voie t . Cependant, d'après Comonave (voir leurs équations II.16), lorsqu'il n'y a pas invariance par parité ou par renversement du sens du temps, on construit des amplitudes cinématiquement régulières en prenant des combinaisons linéaires de la forme :

$$F_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^{t; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3} = \left\{ \hat{M}_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^t + \varepsilon_1 \hat{M}_{\mu_1, \mu_2; -\lambda_1, -\lambda_2}^t + \varepsilon_2 \hat{M}_{-\mu_1, -\mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^t + \varepsilon_3 \hat{M}_{-\mu_1, -\mu_2; -\lambda_1, -\lambda_2}^t \right\} \sqrt{t}^\alpha \sqrt{t-4m^2}^\beta \sqrt{t-4\mu^2}^\gamma, \quad (89)$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et ε_3 sont égaux à ± 1 , et α à 0 ou -1^* . Notons que les quatre amplitudes $\hat{M}^t$ qui apparaissent dans le second membre de (89) ont les mêmes $|\lambda|$ et $|\mu|$, et donc le même comportement asymptotique en $|s|$. Par conséquent, nous avons maintenant un ensemble complet de fonctions invariantes $F_{\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2}^{t; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3}$ qui, lorsque $|s| \rightarrow \infty$ à transfert t fixé réel ≤ 0 , sont bornées par :

$$\begin{cases} \text{Cste } s^{1-\text{Max}(|\lambda|, |\mu|)} \log^2 s & \text{lorsque } \lambda + \mu \text{ est pair} \\ \text{Cste } s^{1-\text{Max}(|\lambda|, |\mu|)} \log^3 s & \text{lorsque } \lambda + \mu \text{ est impair} \end{cases} \quad (90)$$

A transfert t strictement négatif, on a, dans les deux cas, une borne un peu meilleure :

$$\text{Cste } s^{1-\text{Max}(|\lambda|, |\mu|)} \log^{3/2} s \quad (91)$$

*Lorsqu'il y a invariance par parité, il suffit de prendre des combinaisons linéaires de deux amplitudes $\hat{M}^t$. Les coefficients α et β sont alors donnés par la table II.9 de Comonave.

CHAPITRE VI

CONCLUSION

Tout au long des chapitres précédents*, les propriétés de positivité sur le groupe du cercle ont joué un rôle essentiel, aussi bien dans l'extension du domaine d'analyticité que dans l'obtention des bornes asymptotiques. Certaines de ces propriétés ont une origine claire : elles découlent directement de l'unitarité (équation (30) par exemple). En revanche, les propriétés de positivité attachées aux angles de croisement ($- \oint e^{\pm i\chi}$ est de type positif) apparaissent comme tout à fait fortuites, et ne peuvent être rattachées, semble-t-il, à aucune propriété générale de la théorie.

Disons toutefois, que si les propriétés de positivité des angles de croisement ont joué un rôle crucial au cours de ce travail, nous aurions pu, en fait, nous en passer. En effet, G. Sommer^[7], cherchant à étendre le domaine d'analyticité axiomatique de l'amplitude de diffusion élastique pion-nucléon, a utilisé, non pas une amplitude de la forme $M_{\tau,\tau}$, mais une amplitude symétrique de croisement (c'est-à-dire invariante dans l'échange des variables s et u). Les propriétés de positivité de la partie absorptive dans la voie s de cette amplitude entraînent alors automatiquement les propriétés de positivité de la partie absorptive dans la voie u , et à aucun moment, n'apparaît l'angle de croisement du nucléon. De même, dans la diffusion élastique de deux particules de spins 0 et 1, qui fait l'objet de l'appendice A, nous utilisons deux amplitudes symétriques de croisement, à savoir les amplitudes de transversité anti-diagonales (transversité finale égale et opposée à la transversité initiale). Il est clair, d'après la formule (57), que toute amplitude de transversité anti-diagonale est symétrique de croisement, quels que soient les spins σ et σ' . Ces amplitudes donnent d'ailleurs une méthode générale pour étendre le domaine d'analyticité

*Ce travail suit d'assez près l'article cité en référence [20]. Il en diffère essentiellement par l'usage des amplitudes de transversité pour étendre le domaine d'analyticité, et par l'introduction de la notion de fonction de type positif sur le groupe du cercle.

axiomatique^[21], lorsque $\sigma + \sigma'$ est entier. Malheureusement, la méthode n'est pas applicable lorsque $\sigma + \sigma'$ est demi-entier (ne serait-ce que parce que, lorsqu'il y a invariance par parité, toutes ces amplitudes sont nulles).

D'autre part, tout récemment, J.S. Bell^[22] a été capable de construire dans tous les cas de spins, une amplitude symétrique de croisement, dont les parties absorptives ont les bonnes propriétés de positivité. Cette amplitude fournit une alternative au travail que nous présentons ici.

Un autre point mérite d'être mentionné ici : c'est la relation qui existe entre, d'une part les propriétés d'analyticité, et d'autre part les propriétés de positivité (12) de Martin. Cette relation apparaît déjà dans le théorème 4 de l'appendice B. Elle apparaît encore dans la formule (37), où le facteur $(-s)^{2|\tau|}$, introduit initialement pour enlever des singularités cinématiques aux seuils et pseudo-seuils de la voie s , se trouve être exactement le facteur qu'il faut pour assurer les propriétés de positivité dans la voie u .

En fait, il est facile de montrer qu'une amplitude $F(s, \cos\theta_s)$, sans singularité vers l'avant, et de type positif en θ_s , ne peut avoir de singularité au pseudo-seuil de la voie u , c'est-à-dire à $u = (m-\mu)^2$. En effet, s'il en était ainsi, $F(s, \cos\theta_s)$ aurait une singularité en $\cos\theta_s$ au-delà de l'arrière, au point :

$$\cos\theta_s = -1 - \frac{2(m-\mu)^2}{s-(m-\mu)^2} < -1. \quad (92)$$

Les propriétés de positivité entraîneraient alors une singularité en un point $\cos\theta_0(s)$ situé au-delà de l'avant, et tel que :

$$1 \leq \cos\theta_0(s) \leq 1 + \frac{2(m-\mu)^2}{s-(m-\mu)^2}. \quad (93)$$

Ceci n'est pas une singularité cinématique acceptable, à moins que $\cos\theta_0(s) \equiv 1$, ce qui est exclu par hypothèse.

Finalement, signalons que, bien qu'il n'ait jamais été question jusqu'à présent que de diffusion élastique, les résultats que nous avons obtenus s'étendent aisément à des réactions du type $A+B \rightarrow C+D$, l'outil essentiel pour cette extension étant la condition d'unitarité, qui relie les amplitudes inélastiques aux amplitudes élastiques^[23].

APPENDICE A

DIFFUSION ELASTIQUE DE DEUX PARTICULES DE SPINS 0 ET 1

Dans cet appendice, nous donnons une démonstration directe des propriétés asymptotiques des amplitudes de diffusion élastique de deux particules de spins 0 et 1, dans l'hypothèse simplificatrice de la conservation de la parité et du renversement du sens du temps. Ce cas correspondrait à la diffusion $\rho\pi$, si la particule ρ était stable. Bien qu'il n'en soit pas ainsi, nous appellerons, par commodité, ρ et π les deux particules mises en jeu dans le processus considéré.

Fixons d'abord les notations. Nous appellerons p et p' les quadri-impulsions des pions incident et sortant de masse μ , q et q' celles des ρ incident et sortant de masse m , et ε et ε' les vecteurs polarisations de ces dernières particules.

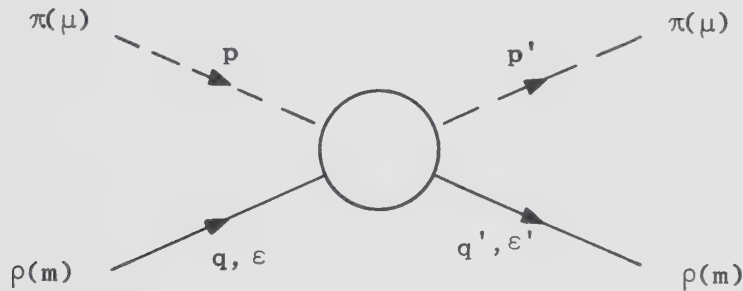


Figure A,1

Posons par définition :

$$P = \frac{p+p'}{2} \quad (A.1)$$

$$Q = \frac{q+q'}{2} .$$

L'amplitude de diffusion s'écrit $\varepsilon'^{\mu} M_{\mu\nu} \varepsilon^{\nu}$, où l' "amplitude spinorielle" $M_{\mu\nu}$ peut se décomposer de la façon suivante ^[2] :

$$M_{\mu\nu} = A P_{\mu} P_{\nu} + B \frac{1}{2} (P_{\mu} Q_{\nu} + Q_{\mu} P_{\nu}) + C Q_{\mu} Q_{\nu} + D g_{\mu\nu} . \quad (A.2)$$

Ceci définit quatre amplitudes invariantes A, B, C et D , fonctions des seules variables de Mandelstam. La statistique dans la voie t ($\pi\pi \rightarrow \rho\rho$), ou de façon équivalente, la symétrie de croisement entre les voies s et u , entraîne que A, C et D sont symétriques, et B antisymétrique dans l'échange des variables s et u . Ces quatre amplitudes sont libres de toute singularité cinématique ainsi que de toute contrainte.^[24] Elles satisfont donc des relations de dispersion en s pour des transferts fixes tels que $-t_M < t \leq 0$. Nous nous proposons premièrement, de montrer qu'elles sont en fait analytiques dans le domaine de Martin, ensuite, d'en déduire pour chacune d'elles une borne asymptotique en s à t fixé. Nous vérifierons que les résultats que nous obtiendrons ainsi sont en accord avec les formules générales des chapitres IV et V.

Pour réaliser ce programme, notre première tâche consiste à développer en ondes partielles les amplitudes A, B, C et D .

I - DEVELOPPEMENT EN ONDES PARTIELLES ET UNITARITE

Plaçons-nous dans le système du centre de masse de la réaction, et notons avec Stora^[25] l'amplitude de diffusion :

$$\varepsilon'^{\mu} M_{\mu\nu} \varepsilon^{\nu} \equiv \langle \hat{q}', \hat{\varepsilon}' | T(s) | \hat{q}, \hat{\varepsilon} \rangle, \quad (A.3)$$

où les vecteurs d'espace de longueur unité $\hat{q}, \hat{q}', \hat{\varepsilon}$ et $\hat{\varepsilon}'$ sont définis par :

$$\begin{aligned} \hat{q} &= \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}, & \hat{q}' &= \frac{\vec{q}'}{|\vec{q}'|} \\ \hat{\varepsilon} &= \frac{\vec{\varepsilon}}{|\vec{\varepsilon}|}, & \hat{\varepsilon}' &= \frac{\vec{\varepsilon}'}{|\vec{\varepsilon}'|}. \end{aligned} \quad (A.4)$$

Appelons $\{ |\alpha_{jm}\rangle \}$ une base complète d'états de rotation du système $\rho\pi$, où j est le moment cinétique total, m sa composante sur un axe fixe, et α un troisième nombre quantique dépendant du couplage choisi, que nous préciserons plus loin. L'invariance par rotation nous permet d'écrire immédiatement :

$$\langle \hat{q}', \hat{\varepsilon}' | T(s) | \hat{q}, \hat{\varepsilon} \rangle = 4\pi \sum_{\alpha \alpha' jm} \langle \hat{q}', \hat{\varepsilon}' | \alpha' jm \rangle f_{\alpha' \alpha}^j(s) \langle \alpha jm | \hat{q}, \hat{\varepsilon} \rangle, \quad (A.5)$$

où les amplitudes d'ondes partielles $f_{\alpha',\alpha}^j(s)$ ne dépendent que de l'énergie totale s . Toute la dépendance angulaire de l'amplitude a ainsi été explicitée dans les éléments de matrice $\langle \alpha_{jm} | \hat{q}, \hat{\varepsilon} \rangle$ et $\langle \hat{q}', \hat{\varepsilon}' | \alpha'_{jm} \rangle$.

En couplage LS, le troisième nombre quantique α est le moment angulaire orbital ℓ qui peut prendre les valeurs $j-1$, j et $j+1$. Comme il s'agit du couplage d'un moment orbital avec un spin 1, nous utiliserons plutôt des états électriques, magnétiques et longitudinaux : $\alpha = E, M$ ou L . Quel que soit le couplage, α et α' prennent trois valeurs, ce qui porte à neuf le nombre d'ondes partielles $f_{\alpha',\alpha}^j$ pour chaque moment cinétique total j . La conservation de la parité réduit ce nombre à cinq. En effet, les états électrique et longitudinal ont la parité $(-)^j$, l'état magnétique la parité opposée $(-)^{j+1}$. Il n'y a donc pas de transition possible entre les premiers d'une part, et le dernier d'autre part. L'invariance par renversement du sens du temps, qui implique la symétrie entre les états initial et final $f_{\alpha',\alpha}^j = f_{\alpha\alpha'}^j$, réduit enfin le nombre d'ondes partielles à quatre, à savoir :

$$f_{EE}^j, f_{LL}^j, f_{EL}^j = f_{LE}^j, f_{MM}^j. \quad (A.6)$$

Nous retrouvons bien l'existence de quatre amplitudes pour décrire la diffusion élastique $\rho\pi$.

Il nous faut maintenant expliciter les éléments de matrice $\langle \hat{q}', \hat{\varepsilon}' | \alpha'_{jm} \rangle$ et $\langle \alpha_{jm} | \hat{q}, \hat{\varepsilon} \rangle$. On a [25] :

$$\langle \hat{q}, \hat{\varepsilon} | \alpha_{jm} \rangle = \hat{\varepsilon}^* \cdot \vec{T}_{\alpha}(\hat{q}) \langle \hat{q} | jm \rangle, \quad (A.7)$$

où $\langle \hat{q} | jm \rangle$ n'est rien d'autre que l'harmonique sphérique $Y_j^m(\hat{q})$, et où les trois opérateurs vectoriels $\vec{T}_{\alpha}(\hat{q})$ sont définis par :

$$\begin{aligned} \vec{T}_E(\hat{q}) &= i \frac{\vec{q} \wedge \vec{\ell}_q}{\sqrt{j(j+1)}} \\ \vec{T}_M(\hat{q}) &= \frac{\vec{\ell}_q}{\sqrt{j(j+1)}} \end{aligned} \quad (A.8)$$

$$\vec{T}_L(\hat{q}) = \hat{q},$$

$\vec{\ell}_q$ est l'opérateur de moment orbital $\frac{1}{i} \vec{q} \wedge \vec{\nabla}_q$. Nous définirons de même les opérateurs $\vec{T}_{\alpha}(\hat{q})$ opérant sur la gauche, par la relation :

$$\begin{aligned} \langle \alpha jm | \hat{q}, \hat{\varepsilon} \rangle &\equiv \langle \hat{q}, \hat{\varepsilon} | \alpha jm \rangle^* \\ &= \langle jm | \hat{q} \rangle \hat{T}_{\alpha}^{\leftarrow}(\hat{q}) \cdot \hat{\varepsilon} \end{aligned} \quad (A.9)$$

Compte tenu de (A.7) et (A.9), le développement (A.5) s'écrit :

$$\langle \hat{q}', \hat{\varepsilon}' | T(s) | \hat{q}, \hat{\varepsilon} \rangle = 4\pi \sum_{\substack{\alpha \alpha' \\ jm}} \hat{\varepsilon}'^* \cdot \vec{T}_{\alpha}(\hat{q}') \langle \hat{q}' | jm \rangle f_{\alpha, \alpha}^j(s) \langle jm | \hat{q} \rangle \hat{T}_{\alpha}^{\leftarrow}(\hat{q}) \cdot \hat{\varepsilon} \quad (A.10)$$

La sommation sur le nombre magnétique m se fait immédiatement grâce au théorème d'addition des harmoniques sphériques, ce qui donne finalement :

$$\langle \hat{q}', \hat{\varepsilon}' | T(s) | \hat{q}, \hat{\varepsilon} \rangle = \sum_{\alpha' \alpha j} (2j+1) f_{\alpha', \alpha}^j(s) \hat{\varepsilon}'^* \cdot \vec{T}_{\alpha'}(\hat{q}') P_j(\hat{q}' \cdot \hat{q}) \hat{T}_{\alpha}^{\leftarrow}(\hat{q}) \cdot \hat{\varepsilon} \quad (A.11)$$

Le calcul des tenseurs à deux indices (d'espace) :

$$f_{\alpha', \alpha}^j(\hat{q}', \hat{q}) \equiv \vec{T}_{\alpha'}(\hat{q}') P_j(\hat{q}' \cdot \hat{q}) \hat{T}_{\alpha}^{\leftarrow}(\hat{q}) \quad , \quad (A.12)$$

ne présente pas de difficulté particulière. Il est commode d'introduire les vecteurs unitaires suivants :

$$\begin{aligned} \hat{n} &= \frac{\hat{q} \wedge \hat{q}'}{\sin \theta} \\ \hat{\omega} &= \frac{\hat{q} \cos \theta - \hat{q}'}{\sin \theta} \\ \hat{\omega}' &= \frac{\hat{q}' \cos \theta - \hat{q}}{\sin \theta} \end{aligned} \quad , \quad (A.13)$$

θ est l'angle de diffusion ($\cos \theta = \hat{q} \cdot \hat{q}'$) , $\hat{n}$ est la normale au plan de diffusion, et $(\hat{\omega}, \hat{q}, \hat{n})$ d'une part, $(\hat{q}', \hat{\omega}', \hat{n})$ d'autre part forment deux trièdres directs orthonormés :

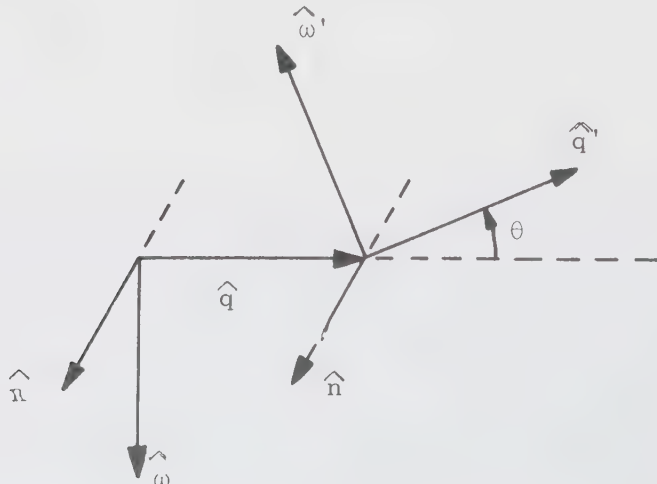


Figure (A,2)

On obtient alors les expressions suivantes des tenseurs (A.12) :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{LL}^j(\hat{q}', \hat{q}) &= \hat{q}' \otimes \hat{q} P_j \\
 \mathcal{P}_{EL}^j(\hat{q}', \hat{q}) &= \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}} \hat{\omega}' \otimes \hat{q} \sin\theta P_j' \\
 \mathcal{P}_{LE}^j(\hat{q}', \hat{q}) &= \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}} \hat{q}' \otimes \hat{\omega} \sin\theta P_j' \\
 \mathcal{P}_{EE}^j(\hat{q}', \hat{q}) &= \frac{1}{j(j+1)} \left\{ (\hat{n} \otimes \hat{n} - \hat{\omega}' \otimes \hat{\omega} \cos\theta) P_j' + \hat{\omega}' \otimes \hat{\omega} \sin^2\theta P_j'' \right\} \\
 \mathcal{P}_{MM}^j(\hat{q}', \hat{q}) &= \frac{1}{j(j+1)} \left\{ (\hat{n} \otimes \hat{n} \cos\theta - \hat{\omega}' \otimes \hat{\omega}) P_j' - \hat{n} \otimes \hat{n} \sin^2\theta P_j'' \right\} ,
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

où $\hat{q}' \otimes \hat{q}$ par exemple représente le tenseur diadique de composantes $(\hat{q}')_i (\hat{q})_j$, et où pour simplifier l'écriture, l'on a omis l'argument $\cos\theta$ des polynômes de Legendre P_j , ainsi que de leurs dérivées P_j' et P_j'' .

En définitive, rassemblant les résultats (A.11,12 et 14), le développement en ondes partielles de l'amplitude de diffusion élastique $\rho\pi$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{q}' \hat{\varepsilon}' | T(s) | \hat{q} \hat{\varepsilon} \rangle &= \sum_j (2j+1) \hat{\varepsilon}'^* \cdot \left\{ f_{LL}^j P_j \hat{q}' \otimes \hat{q} + \right. \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}} f_{EL}^j \sin\theta P_j' (\hat{\omega}' \otimes \hat{q} + \hat{q}' \otimes \hat{\omega}) \\
 &+ \frac{1}{j(j+1)} \left[f_{EE}^j (\sin^2\theta P_j'' - \cos\theta P_j') - f_{MM}^j P_j' \right] \hat{\omega}' \otimes \hat{\omega} \\
 &\left. + \frac{1}{j(j+1)} \left[f_{EE}^j P_j' - f_{MM}^j (\sin^2\theta P_j'' - \cos\theta P_j') \right] \hat{n} \otimes \hat{n} \right\} \cdot \hat{\varepsilon} .
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

Avant de comparer ce développement à l'expression (A.2) de l'amplitude, nous devons transformer cette dernière, et passer du formalisme à quatre composantes au formalisme à trois composantes (d'espace) dans le système du centre de masse. Nous définirons donc le tenseur M à deux indices d'espace :

$$\varepsilon'^{* \mu} M_{\mu\nu} \varepsilon^\nu \equiv (\hat{\varepsilon}')_i^* M_{ij} (\hat{\varepsilon})_j . \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \text{ et } i, j = 1, 2, 3). \tag{A.16}$$

L'élimination des composantes de temps des vecteurs polarisations se

fait aisément, grâce aux relations d'orthogonalité avec les impulsions :

$$\varepsilon_0 E - \vec{\varepsilon} \cdot \vec{q} = \varepsilon'_0 E - \vec{\varepsilon}' \cdot \vec{q}' = 0 \quad , \quad (A.17)$$

E est l'énergie des ρ dans le système du centre de masse total, et nous appellerons ω celle des pions dans le même système.

Pour passer des vecteurs $\vec{\varepsilon}$ et $\vec{\varepsilon}'$ aux vecteurs unitaires $\hat{\varepsilon}$ et $\hat{\varepsilon}'$, il nous faut les longueurs $|\vec{\varepsilon}|$ et $|\vec{\varepsilon}'|$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^2 - \vec{\varepsilon}^2 &= -1 \\ \text{donc : } \vec{\varepsilon}^2 - \left(\frac{\vec{\varepsilon} \cdot \vec{q}}{E} \right)^2 &= 1 \quad . \end{aligned} \quad (A.18)$$

Ici, deux cas sont à considérer, suivant que la polarisation est transversale ou longitudinale :

$$\begin{aligned} 1) \text{ polarisation transversale : } \vec{\varepsilon} \cdot \vec{q} &= 0 \\ \text{dans ce cas } \vec{\varepsilon}^2 &= 1, \text{ et } \vec{\varepsilon} = \hat{\varepsilon} \end{aligned} \quad (A.19)$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ polarisation longitudinale : } \vec{\varepsilon} &= \lambda \vec{q} \\ \text{dans ce cas } \vec{\varepsilon}^2 \left(1 - \frac{q^2}{E^2} \right) &= 1, \text{ et } \vec{\varepsilon} = \frac{E}{m} \hat{\varepsilon} \quad . \end{aligned} \quad (A.20)$$

Ainsi, l'on a :

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon} \cdot \hat{\omega} &= \hat{\varepsilon} \cdot \hat{\omega} \\ \vec{\varepsilon} \cdot \hat{n} &= \hat{\varepsilon} \cdot \hat{n} \end{aligned} \quad (A.21)$$

$$\text{mais : } \vec{\varepsilon} \cdot \vec{q} = \frac{E}{m} \hat{\varepsilon} \cdot \vec{q} \quad ,$$

et des relations analogues avec $\vec{\varepsilon}'$, $\hat{\omega}'$ et $\hat{q}'$.

Le calcul du tenseur M est long mais sans difficulté. On obtient, tous calculs faits :

$$\begin{aligned} M &= \left\{ \frac{q^2 E^2}{4m} \left[(\alpha + \cos\theta)^2 A + (1 - \cos\theta)(\alpha + \cos\theta)B + (1 - \cos\theta)^2 C \right] + \frac{1}{m} (q^2 - E^2 \cos\theta)D \right\} \hat{q}' \otimes \hat{q} \\ &+ \left\{ \frac{q^2}{4} \left[-(\alpha + \cos\theta)A + \left(\frac{\omega}{E} + \cos\theta \right)B + (1 - \cos\theta)C \right] + D \right\} \frac{E}{m} \sin\theta \cdot (\hat{\omega}' \otimes \hat{q} + \hat{q}' \otimes \hat{\omega}) \\ &+ \left\{ \frac{q^2}{4} \sin^2\theta (A - B + C) + \cos\theta D \right\} \hat{\omega}' \otimes \hat{\omega} - D \hat{n} \otimes \hat{n} \quad , \end{aligned} \quad (A.22)$$

où l'on a posé : $\alpha = 1 + \frac{2\omega}{E}$ et $q^2 = \vec{q}^2$.

On reconnaît dans (A.22), les quatre types de termes qui apparaissent déjà dans (A.15). Par identification, on obtient le développement en ondes partielles des amplitudes invariantes A, B, C et D :

$$X \equiv \frac{q^2 E^2}{4m^2} \left\{ (\alpha + \cos\theta)^2 A + (1 - \cos\theta)(\alpha + \cos\theta) B + (1 - \cos\theta)^2 C \right\} + \frac{q^2 - E^2 \cos\theta}{m^2} D$$

$$= \sum_j (2j+1) f_{LL}^j P_j \quad (A.23a)$$

$$Y \equiv \frac{q^2 E}{4m} \left\{ -(\alpha + \cos\theta) A + \left(\frac{\omega}{E} + \cos\theta\right) B + (1 - \cos\theta) C \right\} + \frac{E}{m} D$$

$$= \sum_j \frac{2j+1}{\sqrt{j(j+1)}} f_{EL}^j P_j' \quad (A.23b)$$

$$Z \equiv -\frac{q^2}{4} \sin^2\theta (A - B + C) - \cos\theta D$$

$$= \sum_j \frac{2j+1}{j(j+1)} \left\{ f_{EE}^j (-\sin^2\theta P_j'' + \cos\theta P_j') + f_{MM}^j P_j' \right\} \quad (A.23c)$$

$$-D = \sum_j \frac{2j+1}{j(j+1)} \left\{ f_{EE}^j P_j' + f_{MM}^j (-\sin^2\theta P_j'' + \cos\theta P_j') \right\} \quad (A.23d)$$

Finalement, pour exploiter ces relations, il nous faut l'expression de l'unitarité :

$$\text{Im } f_{\alpha', \alpha}^j(s) = \sum_N \langle \alpha' | T_j^\dagger | N \rangle \langle N | T_j | \alpha \rangle \quad (A.24)$$

Nous en retiendrons premièrement, la positivité des parties imaginaires des ondes partielles diagonales :

$$\text{Im } f_{\alpha\alpha}^j(s) \geq 0 \quad \alpha = E, M, L \quad (A.25)$$

deuxièmement, la borne sur la partie imaginaire de l'onde partielle non diagonale f_{EL}^j :

$$\left[\text{Im } f_{EL}^j(s) \right]^2 \leq \text{Im } f_{EE}^j(s) \cdot \text{Im } f_{LL}^j(s) \quad (A.26)$$

II - EXTENSION DES DOMAINES D'ANALYTICITE

Par simple examen des premiers membres de (A.23a,b,c,), il est facile de se convaincre que les amplitudes :

$$\begin{aligned}\bar{X} &= s^2 X \\ \bar{Y} &= \sqrt{s} Y \\ \bar{Z} &= s^2 Z\end{aligned}\tag{A.27}$$

sont libres de singularité cinématique.

Montrons maintenant que $\bar{X}$, $\bar{Z}$ et $-D$ ont des parties absorptives de type positif dans la voie s . Cela est évident pour $\bar{X}$, puisque $\text{Im } f_{LL}^j \geq 0$ et P_j' est de type positif. En ce qui concerne $\bar{Z}$ et $-D$, il suffit de montrer que $(-\sin^2\theta P_j'' + \cos\theta P_j')$ est aussi une fonction de type positif. Or :

$$-\sin^2\theta P_j'' + \cos\theta P_j' = -\frac{d^2}{d\theta^2} P_j \quad .\tag{A.28}$$

Sachant que P_j est une somme à coefficients positifs de $\cos p\theta$:

$$P_j = \sum_{p=0}^j c_p \cos p\theta \quad c_p > 0 \quad ,\tag{A.29}$$

on voit aisément qu'il en est de même pour $-\frac{d^2}{d\theta^2} P_j$:

$$-\frac{d^2}{d\theta^2} P_j = \sum_{p=0}^j p^2 c_p \cos p\theta \quad ,\tag{A.30}$$

ce qui démontre que $(-\sin^2\theta P_j'' + \cos\theta P_j')$ est de type positif.

A cause de sa propriété de symétrie par échange de s et u , l'amplitude $-D$ a une partie absorptive dans la voie u qui est aussi de type positif. Elle satisfait donc toutes les hypothèses du théorème de Martin, et est analytique dans le domaine $\mathcal{D}(R) = \text{produit quasi-topologique } (|t| < R) \times (s \text{ dans le plan coupé})$.

Une première conséquence en est que la partie absorptive de $\bar{Z}$ dans la voie s est analytique en t dans le cercle $|t| < R$, pour s fixé $> (m+\mu)^2$. En effet, de l'analyticité de D , on déduit que la série :

$$-\text{Abs}_s D = \sum_j \frac{2j+1}{j(j+1)} \left\{ \text{Im } f_{EE}^j P_j' + \text{Im } f_{MM}^j (-\sin^2\theta P_j'' + \cos\theta P_j') \right\} \quad ,\tag{A.31}$$

converge jusqu'à $t = R$ (ou tout au moins, jusqu'à $t = R - \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on veut), c'est-à-dire jusqu'à $\cos\theta = \cos i\psi_R$, avec :

$$\cos i\psi_R = 1 + \frac{2sR}{\vartheta^2} > 1 \quad . \quad (A.32)$$

Or, pour $\cos\theta > 1$, P'_j , $(-\sin^2\theta P''_j)$ et $(\cos\theta P'_j)$ sont positifs. Donc, les trois séries :

$$\sum_j \frac{2j+1}{j(j+1)} \operatorname{Im} f_{EE}^j P'_j, \sum_j \frac{2j+1}{j(j+1)} \operatorname{Im} f_{MM}^j P''_j \text{ et } \sum_j \frac{2j+1}{j(j+1)} \operatorname{Im} f_{MM}^j P'_j, \quad (A.33)$$

convergent séparément jusqu'à $\cos\theta = \cos i\psi_R$. De façon plus précise, elles convergent absolument à l'intérieur de l'ellipse $\mathcal{E}(\psi_R)$, de foyer ± 1 , passant par le point $\cos i\psi_R$. De plus, dérivées terme à terme par rapport à $\cos\theta$, elles convergent encore dans le même domaine. Il en résulte immédiatement que la série :

$$\operatorname{Abs}_s \bar{Z}(s,t) = \vartheta^2 \sum_j \frac{2j+1}{j(j+1)} \left\{ \operatorname{Im} f_{EE}^j (-\sin^2\theta P''_j + \cos\theta P'_j) + \operatorname{Im} f_{MM}^j P'_j \right\}, \quad (A.34)$$

converge aussi dans $\mathcal{E}(\psi_R)$, ce qui démontre l'analyticité de $\operatorname{Abs}_s \bar{Z}(s,t)$ dans $|t| < R$, pour $s \geq (m+\mu)^2$.

De plus, si à t fixé ($|t| < R$), $\operatorname{Abs}_s D$ et sa dérivée par rapport à $\cos\theta$ sont bornées par Cs^N , il en est de même des séries (A.33), ainsi que des séries obtenues par dérivation par rapport à $\cos\theta$. Il en résulte aussitôt que $\operatorname{Abs}_s \bar{Z}$ est bornée par Cs^{N+2} .

Pour aller plus loin, et en particulier pour atteindre les amplitudes longitudinales qui nous échappent encore, il est commode de construire une seconde amplitude qui, comme D , est symétrique de croisement, et possède des propriétés de positivité évidentes dans la voie s . $\bar{X}$ et $\bar{Z}$ ne sont pas symétriques de croisement et ne peuvent faire l'affaire. En revanche, nous savons que les amplitudes de transversité antidiagonales $T_{\tau,-\tau}$ (transversité finale τ égale et opposée à la transversité initiale $-\tau$), sont symétriques de croisement (voir Comonave, équation (IV.6)). T_{00} d'ailleurs, n'est rien d'autre que l'amplitude D elle-même. Quant à $T_{+1,-1}$ (qui coïncide avec $T_{-1,+1}$ à cause de l'invariance par renversement du sens du temps), elle va nous fournir la solution de notre problème.

Les polarisations $\hat{\varepsilon}$ et $\hat{\varepsilon}'$ correspondant à $T_{+1,-1}$ sont :

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{q} + i\hat{\omega}}{\sqrt{2}} \quad , \quad \hat{\varepsilon}' = \frac{\hat{q}' + i\hat{\omega}'}{\sqrt{2}} \quad , \quad (A.35)$$

d'où :

$$\begin{aligned} T_{+1,-1} &= (\hat{\varepsilon}^*)_i M_{ij} (\hat{\varepsilon})_j \\ &= \frac{1}{2} (X-Z) \end{aligned} \quad (A.36)$$

Exprimons les coefficients de A,B,C,D dans $T_{+1,-1}$ en fonction de s,t et u. Il vient, tous calculs faits :

$$T_{+1,-1} = \frac{t}{32m^2} \left\{ (t-4\mu^2)A - (s-u)B + (t-4m^2)C \right\} + \frac{(m^2-\mu^2)^2-su}{8m^2} A \quad (A.37)$$

La symétrie de croisement de $T_{+1,-1}$ est évidente. De plus cette amplitude est libre de singularité cinématique.

$T_{+1,-1}$ apparaît comme la différence de deux fonctions $X(s,t)$ et $Z(s,t)$ dont les parties absorptives sont de type positif. Elle n'a donc pas elle-même de propriété de positivité. Définissons alors une nouvelle fonction F par :

$$T_{+1,-1} = F - \frac{1}{2} \left\{ \frac{(s-s_0)^{N+3}}{\pi} \int_{(m+\mu)^2}^{\infty} \frac{\text{Abs}_s Z(x,t) dx}{(x-s_0)^{N+3}(x-s)} + \frac{(u-u_0)^{N+3}}{\pi} \int_{(m+\mu)^2}^{\infty} \frac{\text{Abs}_s Z(x,t) dx}{(x-u_0)^{N+3}(x-u)} \right\} \quad (A.38)$$

Les intégrales dans le second membre sont assurées de converger pour tout t ($|t| < R$), et la quantité entre crochets est une fonction analytique dans $\mathcal{D}(R)$. Quant à F, elle satisfait bien évidemment les premières conditions (a,b,c) du théorème de Martin. De plus, ses parties absorptives dans les voies s et u sont de type positif, car :

$$\begin{aligned} \text{Abs}_s F &= \frac{1}{2} \sum_j (2j+1) \text{Im } f_{LL}^j(s) P_j(\cos \theta_s) \\ \text{Abs}_u F &= \frac{1}{2} \sum_j (2j+1) \text{Im } f_{LL}^j(u) P_j(\cos \theta_u) \end{aligned} \quad (A.39)$$

Elle est donc analytique dans un domaine $\mathcal{D}(R') =$ produit quasi-topologique ($|t| < R'$) $\times$ (s dans le plan coupé). Si R' est différent de R, nous ne retiendrons que le plus petit de ces deux nombres, que nous appellerons encore R : nous avons démontré que $T_{+1,-1}$ est analytique dans le domaine de Martin $\mathcal{D}(R)$.

De là, nous déduisons tout d'abord que $\text{Abs}_s \bar{X}$ est analytique en $\cos\theta$ dans l'ellipse $\mathcal{E}(\psi_R)$, car :

$$\text{Abs}_s \bar{X} = 2 s^2 \text{Abs}_s F \quad . \quad (\text{A.40})$$

D'autre part, de (A.26) et de l'inégalité :

$$|P'_j(\cos\theta)| < P'_j(\cos i\psi) \quad , \quad (\text{A.41})$$

pour $|\text{Im}\theta| < \psi$, on déduit que :

$$\begin{aligned} \left| \sum_j \frac{2j+1}{\sqrt{j(j+1)}} \text{Im } f_{EL}^j P'_j(\cos\theta) \right|^2 &\leq \sum_j (2j+1) \text{Im } f_{LL}^j P'_j(\cos i\psi_R) \\ &\cdot \sum_j \frac{2j+1}{j(j+1)} \text{Im } f_{EE}^j P'_j(\cos i\psi_R) \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

ce qui montre que $\text{Abs}_s \bar{Y}$ est aussi analytique en $\cos\theta$ dans l'ellipse $\mathcal{E}(\psi_R)$.
 Finalement nous avons obtenu que les parties absorptives de $\bar{X}$, $\bar{Y}$ et $\bar{Z}$ dans la voie s sont toutes les trois analytiques en t dans $|t| < R$, et, pour les mêmes raisons que précédemment, bornées polynômialement en s à t fixé.
 Les parties absorptives dans la voie u de ces mêmes amplitudes, sont des combinaisons linéaires à coefficients analytiques des parties absorptives dans la voie u des amplitudes $\bar{X}'$, $\bar{Y}'$ et $\bar{Z}'$, obtenues à partir de $\bar{X}$, $\bar{Y}$ et $\bar{Z}$ par échange des variables s et u (D n'intervient pas, car c'est une fonction propre de la matrice de croisement). Bien évidemment, $\text{Abs}_u \bar{X}'$, $\text{Abs}_u \bar{Y}'$ et $\text{Abs}_u \bar{Z}'$ sont analytiques en t dans $|t| < R$ (car $\text{Abs}_u \bar{X}'(u,t) = \text{Abs}_s \bar{X}(s=u,t), \dots$).
 Donc les parties absorptives dans la voie u de $\bar{X}$, $\bar{Y}$ et $\bar{Z}$ sont analytiques en t dans $|t| < R$, et aussi bornées polynômialement. En conséquence, les relations de dispersion satisfaites par $\bar{X}$, $\bar{Y}$ et $\bar{Z}$ pour $-t_M < t \leq 0$ peuvent être prolongées analytiquement en t (avec suffisamment de soustractions) dans le cercle $|t| < R$. On en déduit aussitôt le même résultat pour A, B et C .
 Donc les quatre amplitudes A, B, C, D sont analytiques dans le domaine de Martin $\mathcal{D}(R)$.

III - BORNES DE FROISSART

La méthode qui a permis à Martin^[4] de démontrer les bornes de Froissart dans le cas scalaire, s'applique ici sans modification essentielle. En effet, d'une part nous venons de démontrer l'analyticité en t jusqu'à un transfert positif fixe R , indépendant de l'énergie, d'autre part, les fonctions P_j , P'_j et $\frac{d^2}{d\theta^2} P_j$ qui apparaissent dans les développements en ondes partielles (A.23) sont, pour $\cos\theta > 1$, des fonctions exponentiellement croissantes de j . Cela suffit pour que les ondes partielles $f_{\alpha, \alpha}^j(s)$, bornées en module par $\sqrt{s}/2q$, décroissent exponentiellement en j , dès que j est supérieur à J , où J se comporte asymptotiquement comme $\sqrt{s} \log s$.

Calculons en premier lieu, les bornes asymptotiques vers l'avant. Remarquons tout d'abord que les équations (A.23c et d) deviennent identiques, membre à membre, à $t = 0$. Simultanément, l'amplitude C disparaît des équations (A.23), qui se réduisent ainsi, à $t = 0$, à un système de trois équations pour trois fonctions A, B et D . Afin d'obtenir une quatrième équation contenant C , nous devons retrancher membre à membre (A.23c et d), et factoriser la quantité $(1 - \cos\theta)$ qui apparaît dans les deux membres, ce qui donne :

$$-\frac{Z+D}{1-\cos\theta} = -\frac{q^2}{4} (1+\cos\theta)(A-B+C) + D$$

$$- \sum_j \frac{2j+1}{j(j+1)} (f_{MM}^j - f_{EE}^j) [(1+\cos\theta) P_j'' + P_j'] \quad . \quad (A.43)$$

Ceci étant, et connaissant les valeurs 1 , $j(j+1)/2$ et $(j-1)j(j+1)(j+2)/8$ des polynômes P_j , P'_j et P_j'' à $\cos\theta = 1$, on calcule aisément, à partir des équations (A.23a,b,d) et (A.43), les comportements asymptotiques suivants, à $t = 0$:

$$\left| \frac{q^2 E^2}{4m^2} (1+\alpha)^2 A-D \right| \lesssim \sum_{j=0}^J (2j+1) \sim J^2$$

$$\lesssim \text{Cstes} \log^2 s \quad , \quad (A.44a)$$

$$\frac{E}{m} \left| -\frac{q^2}{4} (1+\alpha)A + \frac{q^2}{4} (1+\frac{\omega}{E})B+D \right| \lesssim \sum_{j=0}^J \frac{2j+1}{\sqrt{j(j+1)}} \frac{j(j+1)}{2} \sim \frac{J^3}{6}$$

$$\lesssim \text{Cste} s\sqrt{s} \log^3 s \quad , \quad (A.44b)$$

$$|D| \lesssim \sum_{j=0}^J \frac{2j+1}{j(j+1)} \sim \frac{j(j+1)}{2} \sim J^2$$

$$\lesssim \text{Cste } s \log^2 s, \quad (\text{A.44c})$$

$$\left| -\frac{9}{2} (A-B+C)+D \right| \lesssim \sum_{j=0}^J \frac{2j+1}{j(j+1)} \frac{(j-1)j(j+1)(j+2)}{4} \sim \frac{J^4}{2.4!}$$

$$\lesssim \text{Cste } s^2 \log^4 s. \quad (\text{A.44d})$$

On en tire ensuite facilement les comportements asymptotiques (vers l'avant) des amplitudes A,B,C,D :

$$|A| \lesssim \text{Cste } \frac{1}{s} \log^2 s, \quad (\text{A.45a})$$

$$|B| \lesssim \text{Cste } \log^3 s, \quad (\text{A.45b})$$

$$|C| \lesssim \text{Cste } s \log^4 s, \quad (\text{A.45c})$$

$$|D| \lesssim \text{Cste } s \log^2 s. \quad (\text{A.45d})$$

Lorsque le transfert t est strictement négatif, on obtient des bornes meilleures, en utilisant les inégalités (théorème 7.3.3. de la réf.[17]) :

$$|P_j(\cos\theta)| < \frac{\text{Cste}}{\sqrt{j} \sin\theta},$$

$$|P'_j(\cos\theta)| < \text{Cste} \sqrt{\frac{j}{\sin^3\theta}} \quad (\text{A.46})$$

On trouve ainsi :

$$|A| \lesssim \text{Cste } \frac{1}{s} (\log s)^{3/2}, \quad (\text{A.47a})$$

$$|B| \lesssim \text{Cste } (\log s)^{3/2}, \quad (\text{A.47b})$$

$$|C| \lesssim \text{Cste } s (\log s)^{3/2}, \quad (\text{A.47c})$$

$$|D| \lesssim \text{Cste } s (\log s)^{3/2}. \quad (\text{A.47d})$$

Ces divers résultats sont à comparer aux formules générales du chapitre IV. Pour cela, calculons tout d'abord les amplitudes d'hélicité $M_{\lambda\mu}^S$ dans la voie s . Les vecteurs polarisations $\hat{\varepsilon}_{\mu}$ et $\hat{\varepsilon}'_{\lambda}$ correspondants aux hélicités initiale μ et finale λ , sont donnés par :

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_{+1} &= + \frac{\hat{n} + i\hat{\omega}}{\sqrt{2}}, & \hat{\varepsilon}_0 &= \hat{q} \\ \hat{\varepsilon}'_{+1} &= + \frac{\hat{n} - i\hat{\omega}'}{\sqrt{2}}, & \hat{\varepsilon}'_0 &= \hat{q}'\end{aligned}\quad (A.48)$$

d'où l'on déduit aisément :

$$\begin{aligned}M_{0,0}^S &= X \\ M_{+1,+1}^S &= (Z-D)/2 \\ M_{+1,0}^S &= -i \sin\theta Y / \sqrt{2} \\ M_{+1,-1}^S &= - (Z+D)/2.\end{aligned}\quad (A.49)$$

Vers l'avant, les amplitudes de "spin-flip" $M_{+1,0}^S$ et $M_{+1,-1}^S$ s'annulent comme il se doit, ce qui nous amène à considérer les amplitudes partiellement régularisées de Comonave $\hat{M}_{\lambda\mu}^S$, qui elles, ne s'annulent pas à $t=0$:

$$\begin{aligned}\hat{M}_{+1,0}^S &= M_{+1,0}^S / \sin \frac{\theta}{2} \\ \hat{M}_{+1,-1}^S &= M_{+1,-1}^S / \sin^2 \frac{\theta}{2}.\end{aligned}\quad (A.50)$$

Vers l'avant :

$$\begin{aligned}\hat{M}_{0,0}^S &= \frac{q^2 E^2}{4m^2} (1+\alpha)^2 A - D \\ \hat{M}_{+1,+1}^S &= - D \\ \hat{M}_{+1,0}^S &= - i\sqrt{2} \frac{E}{m} \left[- \frac{q^2}{4} (1+\alpha)A + \frac{q^2}{4} \left(1 + \frac{\omega}{E}\right)B + D \right] \\ \hat{M}_{+1,-1}^S &= - q^2 (A-B+C) + 2D.\end{aligned}\quad (A.51)$$

Les relations (A.44) fournissent alors les bornes asymptotiques suivantes (à $t=0$) :

$$\begin{aligned}
 |\hat{M}_{0,0}^s| &\lesssim \text{Cste } s \log^2 s \\
 |\hat{M}_{+1,+1}^s| &\lesssim \text{Cste } s \log^2 s \\
 |\hat{M}_{+1,0}^s| &\lesssim \text{Cste } s^{3/2} \log^3 s \\
 |\hat{M}_{+1,-1}^s| &\lesssim \text{Cste } s^2 \log^4 s \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{A.52}$$

A transfert fixe strictement négatif, on trouve aisément que toutes les amplitudes $M_{\lambda\mu}^s$ sont bornées asymptotiquement par $\text{Cste } s \log^{3/2} s$, ce qui est conforme à la formule générale (79).

Pour obtenir la borne (69) en $s \log^2 s$ sur toutes les amplitudes d'hélicité $M_{\lambda\mu}^s$ (borne valable dans toute la région physique $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, y compris l'avant), nous devons procéder différemment, et chercher directement des bornes asymptotiques pour $Y \sin\theta$ et $Z+D$, au lieu de bornes pour Y et $(Z+D)/(1-\cos\theta)$, comme nous avons fait plus haut.

Notons tout d'abord l'inégalité :

$$\sin\theta P'_j \leq j \tag{A.53}$$

qui peut se démontrer de la façon suivante : de (A.29) on tire :

$$\begin{aligned}
 \sin\theta P'_j &= - \frac{d}{d\theta} P_j \\
 &= \sum_{p=0}^j p c_p \sin p\theta \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{A.54}$$

d'où :

$$\sin\theta P'_j \leq j \sum_{p=0}^j c_p = j \quad . \tag{A.55}$$

Cette inégalité permet de calculer une borne pour $Y \sin\theta$:

$$\begin{aligned}
 |Y \sin\theta| &\lesssim \sum_{j=0}^J \frac{2j+1}{\sqrt{j(j+1)}} |\sin\theta P'_j| \lesssim J^2 \\
 &\lesssim \text{Cste } s \log^2 s \quad .
 \end{aligned}
 \tag{A.56}$$

De même :

$$|Z+D| \lesssim \sum_{j=0}^J \frac{2j+1}{j(j+1)} \left| -\frac{d^2}{d\theta^2} P_j + P'_j \right| \lesssim J^2$$

$$\lesssim \text{Cste } s \log^2 s \quad . \quad (A.57)$$

Revenant aux expressions (A.49) des amplitudes $M_{\lambda\mu}^s$, on vérifie bien qu'elles sont toutes asymptotiquement bornées par $\text{Cste } s \log^2 s$, dans toute la région physique $-1 \leq \cos\theta \leq 1$.

Notons en passant que de (A.56 et A.57), on tire les bornes suivantes :

$$\sqrt{-t} |B| \lesssim \text{Cste } \log^2 s$$

$$-t |C| \lesssim \text{Cste } s \log^2 s \quad , \quad (A.58)$$

qui sont à comparer aux bornes (A.45b et c). On passe aisément des unes aux autres, en utilisant le théorème de l'appendice D.

Enfin, donnons les expressions des amplitudes d'hélicité dans la voie t :

$$M_{0,0}^t = \frac{1}{16m^2} \left\{ -\frac{t(s-u)^2}{t-4m^2} A + t(s-u)B - t(t-4m^2)C + 8(t-2m^2)D \right\}$$

$$M_{+1,+1}^t = -\frac{1}{8} \left[t-4\mu^2 - \frac{(s-u)^2}{t-4m^2} \right] A + D$$

$$M_{+1,0}^t = \frac{\sqrt{t} \sin\theta_t}{16\sqrt{2}m} \sqrt{\frac{t-4\mu^2}{t-4m^2}} \left\{ 2(s-u)A - (t-4m^2)B \right\}$$

$$M_{+1,-1}^t = \frac{t-4\mu^2}{8} \sin^2\theta_t A \quad . \quad (A.59)$$

En utilisant les bornes (A.47a,b,c,d) et (A.58), on trouve facilement que :

$$|M_{0,0}^t| \lesssim \text{Cste } s \log^2 s$$

$$|M_{+1,+1}^t| \lesssim \text{Cste } s \log^2 s$$

$$\left| \frac{M_{+1,0}^t}{\sqrt{t} \sin\frac{\theta_t}{2}} \right| \lesssim \text{Cste } \log^3 s \quad \left| \frac{M_{+1,-1}^t}{\sin^2\frac{\theta_t}{2}} \right| \lesssim \text{Cste } \frac{1}{s} \log^2 s \quad , \quad (A.60)$$

en conformité avec les formules générales (86) et (87).

APPENDICE B

FONCTIONS DE TYPE POSITIF SUR UN GROUPE

I - DEFINITION ET QUELQUES PROPRIETES GENERALES^[26]

Une fonction complexe $f(g)$, définie sur le groupe $\mathcal{G}$, est dite de type positif sur ce groupe, si, quels que soient les éléments $g_1, g_2, \dots, g_n$ de $\mathcal{G}$, la matrice $\{f(g_i^{-1} g_j)\}_{1 \leq i, j \leq n}$ est hermitique, c'est-à-dire si :

$$\sum_{i, j=1}^n \alpha_i^* f(g_i^{-1} g_j) \alpha_j \geq 0, \quad (B.1)$$

quels que soient les éléments $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{G}$, et les nombres complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Il est clair que toute combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions de type positif, est encore de type positif.

On démontre aisément les propriétés suivantes pour une fonction de type positif :

$$f(e) \geq 0 \quad (B.2)$$

$$f(g^{-1}) = f(g)^* \quad (B.3)$$

$$|f(g)| \leq f(e) \quad (B.4)$$

où e est l'élément unité du groupe $\mathcal{G}$. La première inégalité se démontre en ne prenant qu'un seul élément dans la somme (B.1), les deux dernières en prenant les deux éléments $g_1 = e$ et $g_2 = g$, avec $\alpha_1 = 1$, et α_2 soit réel soit imaginaire pur.

Le théorème suivant nous sera très utile par la suite :

Théorème 1 : Tout élément de matrice diagonal $\langle \lambda | U(g) | \lambda \rangle$ d'une représentation unitaire $U(g)$ du groupe $\mathcal{G}$, est de type positif sur $\mathcal{G}$. Réciproquement, à toute fonction continue $f(g)$ de type positif sur $\mathcal{G}$, correspondent une représentation unitaire $U(g)$ et un élément $|\lambda\rangle$ de l'espace de représentation, tels que $f(g) = \langle \lambda | U(g) | \lambda \rangle$.

Le théorème direct est évident : il suffit de remarquer que

$\sum_{i,j=1}^n \alpha_i^* \langle \lambda | U(g_i^{-1} g_j) | \lambda \rangle \alpha_j$ n'est rien d'autre que la norme au carré du vecteur $\sum_{j=1}^n U(g_j) | \lambda \rangle \alpha_j$. Quant à la réciproque, c'est le "théorème de

reconstruction de Gelfand" (voir p.392 de la deuxième réf. [26]).

Lorsque la représentation $U(g)$ associée à $f(g)$ est irréductible, la fonction f est dite pure. Repérons les représentations unitaires irréductibles par l'indice $j : U_j$. On a le théorème suivant :

Théorème 2 : Toute fonction $f(g)$, continue et de type positif sur $\mathcal{G}$, est développable en série de fonctions de type positif pures, à coefficients positifs :

$$f(g) = \sum_j c_j \langle \lambda_j | U_j(g) | \lambda_j \rangle \quad (c_j \geq 0) \quad . \quad (B.5)$$

La convergence est uniforme sur tout compact.

Ce théorème signifie que les éléments diagonaux des représentations unitaires irréductibles de $\mathcal{G}$ sont les éléments extrémaux du cône convexe des fonctions continues de type positif sur $\mathcal{G}$.

Démontrons la positivité des c_j lorsque $\mathcal{G}$ est un groupe compact. Pour cela, il suffit de prendre dans (B.1) les α égaux à $\langle \lambda_j | U_j(g^{-1}) | \lambda_j \rangle$, d'intégrer sur le groupe $\mathcal{G}$ avec sa mesure $d\mu(g)$, et d'utiliser les relations d'orthogonalité des représentations :

$$\begin{aligned}
 & \int d\mu(g)^* \int d\mu(g') \langle \lambda_J | U_J(g^{-1}) | \lambda_J \rangle^* f(g^{-1}g') \langle \lambda_J | U_J(g'^{-1}) | \lambda_J \rangle = \\
 & = \sum_{j, \mu} c_j \int d\mu(g)^* \langle \lambda_J | U_J(g^{-1}) | \lambda_J \rangle^* \langle \lambda_j | U_j(g^{-1}) | \mu \rangle \cdot \\
 & \quad \cdot \int d\mu(g') \langle \mu | U_j(g') | \lambda_j \rangle \langle \lambda_J | U_J(g') | \lambda_J \rangle^* \\
 & = (N_J)^2 c_J \geq 0 .
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

Du théorème 1. on déduit aisément le théorème 3 :

Théorème 3 : Le produit $f(g) h(g)$ de deux fonctions continues f et h de type positif sur $\mathcal{G}$, est encore de type positif.

En effet, si l'on appelle $U_f, U_h, |\lambda_f\rangle, |\lambda_h\rangle$ les représentations et les vecteurs associés à f et h par le théorème 1, on a :

$$\begin{aligned}
 f(g)h(g) &= \langle \lambda_f | U_f(g) | \lambda_f \rangle \langle \lambda_h | U_h(g) | \lambda_h \rangle \\
 &= \langle \lambda_f \otimes \lambda_h | (U_f \otimes U_h)(g) | \lambda_f \otimes \lambda_h \rangle .
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

II - FONCTIONS DE TYPE POSITIF SUR LE GROUPE DU CERCLE

Considérons maintenant le cas particulier où $\mathcal{G}$ est le groupe R^2 des rotations dans le plan. Plus précisément, puisque nous avons affaire à des spins demi-entiers aussi bien qu'entiers, $\mathcal{G}$ est le groupe de recouvrement à deux feuillets de R^2 . Une fonction définie sur $\mathcal{G}$ est une fonction $f(\theta)$ de période 4π . Par définition, une fonction de type positif sur $\mathcal{G}$ est telle que :

$$\int_0^{4\pi} \alpha(\theta)^* d\theta \int_0^{4\pi} \alpha(\theta') d\theta' f(\theta-\theta') \geq 0 , \tag{B.8}$$

quel que soit $\alpha(\theta)$. L'inégalité (B.4) s'écrit pour une telle fonction :

$$|f(\theta)|_{0 \leq \theta \leq 4\pi} \leq f(0) . \quad (B.9)$$

D'après le théorème 1, les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & e^{i\lambda\theta} && (\lambda \text{ entier ou demi-entier}) \\ \text{b)} \quad & d_{\lambda\lambda}^j(\theta) && (\lambda \text{ et } j \text{ entiers ou demi-entiers}) \\ \text{c)} \quad & \cos\lambda\theta = \frac{1}{2} (e^{i\lambda\theta} + e^{-i\lambda\theta}) && (\lambda \text{ entier ou demi-entier}) \\ \text{d)} \quad & \frac{\sin p\theta}{\sin\theta} = \sum_{q=0}^{p-1} e^{i(p-1-2q)\theta} && (p \text{ entier}) \end{aligned} \quad (B.10)$$

sont de type positif sur $\mathcal{G}$.

Les fonctions de type positif pures sont les $e^{i\lambda\theta}$. Par conséquent, d'après le théorème 2, toute fonction continue de type positif sur $\mathcal{G}$, est développable en série trigonométrique à coefficients positifs :

$$f(\theta) = \sum_{\substack{\lambda \text{ entier} \\ \text{ou demi-entier}}} c_{\lambda} e^{i\lambda\theta} \quad (c_{\lambda} \geq 0) . \quad (B.11)$$

De ce résultat, on déduit aisément le théorème 3 dans le cas particulier du groupe $\mathcal{G}$ considéré. En effet, le produit de deux séries à coefficients positifs est encore une série à coefficients positifs.

D'une importance particulière pour nous, sont les fonctions de $\cos\theta$ analytiques dans un voisinage du segment $(-1,1)$, et de type positif sur $\mathcal{G}$ (en fait, comme ces fonctions sont définies sur le groupe R_2 , elles sont de type positif sur R_2). La série trigonométrique d'une telle fonction s'écrit :

$$\varphi(\cos\theta) = \sum_{p \text{ entier} \geq 0} c_p \cos p\theta \quad c_p > 0 \quad (B.12)$$

et elle satisfait l'inégalité :

$$|\varphi(\cos\theta)|_{-1 \leq \cos\theta \leq 1} \leq \varphi(1) . \quad (B.13)$$

La série dérivée converge dans le même voisinage du segment $(-1, +1)$, et c'est de plus une fonction de type positif. En effet, d'après (B.10d) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\cos\theta} \varphi(\cos\theta) &= \sum_{p \text{ entier } \geq 0} c_p \frac{\sin p\theta}{\sin\theta} \\ &= \sum_{p \text{ entier } \geq 0} c'_p \cosp\theta \quad (c'_p \geq 0) \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Il en est évidemment de même de toutes les dérivées de φ . Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème 4 : Toute fonction $\varphi(\cos\theta)$ analytique en $\cos\theta$ dans un voisinage du segment $(-1, +1)$, et de type positif sur R_2 , possède les propriétés de positivité de Martin :

$$\left| \left(\frac{d}{d\cos\theta} \right)^n \varphi(\cos\theta) \right|_{-1 \leq \cos\theta \leq 1} \leq \left(\frac{d}{d\cos\theta} \right)^n \varphi(\cos\theta) \Big|_{\cos\theta = 1} \quad (\text{B.15})$$

Sont dans ce cas les fonctions suivantes :

- a) $\cosp\theta$ (p entier)
- b) $d_{\lambda\lambda}^j(\theta)$ pour j et λ entiers, et en particulier $P_\ell(\cos\theta)$ (B.16)
- c) $\cos\frac{\theta}{2} d_{\lambda\lambda}^j(\theta)$ pour j et λ demi-entiers.

Enfin, nous aurons besoin d'un théorème qui concerne le domaine de convergence des séries trigonométriques de fonctions de type positif. Rappelons tout d'abord que le domaine de convergence d'une série du type (B.12) est l'intérieur d'une ellipse de foyers $\cos\theta = \pm 1$ (théorème 9.1.1 de la référence [17]). On a alors le théorème suivant :

Théorème 5 : Soient $f_1(\theta), f_2(\theta) \dots f_N(\theta)$, N fonctions définies et continues sur le cercle, de type positif sur le groupe du cercle, et telles que leur somme soit une fonction $F(\cos\theta)$, analytique en $\cos\theta$ dans une ellipse $\mathcal{E}$

de foyers $\cos\theta = \pm 1$. Alors $f_1(\theta), f_2(\theta) \dots f_N(\theta)$ sont de la forme suivante :

$$f_j(\theta) = g_j(\cos\theta) + \sin\theta h_j(\cos\theta) \quad (j = 1, 2 \dots N) \quad (B.17)$$

où les fonctions $g_j(\cos\theta)$ et $h_j(\cos\theta)$ sont analytiques en $\cos\theta$ dans l'ellipse $\mathcal{E}$, avec :

$$\begin{aligned} F(\cos\theta) &= \sum_{j=1}^N g_j(\cos\theta) \\ \sum_{j=1}^N h_j(\cos\theta) &= 0 \end{aligned} \quad (B.18)$$

De plus, à l'intérieur de $\mathcal{E}$, on a les bornes suivantes :

$$\begin{aligned} |g_j(\cos\theta)| &\leq F(\cos i \operatorname{Im}\theta) \\ |h_j(\cos\theta)| &\leq F'(\cos i \operatorname{Im}\theta) \end{aligned} \quad (B.19)$$

démonstration: d'après le théorème 2 :

$$f_j(\theta) = \sum_{p \text{ entier}} a_{jp} e^{ip\theta} \quad (j = 1, 2 \dots N) \quad (B.20)$$

la série du second membre convergeant uniformément en θ , pour tout θ réel. D'autre part, par hypothèse :

$$F(\cos\theta) = \sum_p \left(\sum_j a_{jp} \right) e^{ip\theta} \quad (B.21)$$

la série convergeant cette fois-ci pour tout θ dans un domaine $|\operatorname{Im}\theta| < \psi$ (l'intérieur de l'ellipse $\mathcal{E}$). Elle converge en particulier aux points $\theta = \pm i\psi$ (tout au moins aussi près que l'on veut de ces points) :

$$F(\cos i\psi) = \sum_p \left(\sum_j a_{jp} \right) e^{\pm p\psi} \quad (B.22)$$

Mais la série (B.22) est à termes tous positifs. Toute sous-série que l'on en extrait, est aussi convergente, en particulier $\sum_p a_{jp} e^{\pm p\psi}$. On en déduit alors la convergence des séries (B.20) pour tout θ dans la

bande $|\operatorname{Im}\theta| < \psi$.

De plus, on peut écrire :

$$f_j(\theta) = a_{j0} + \sum_{p \geq 1} (a_{jp} + a_{j-p}) \cosh p\theta + i \sinh \theta \sum_{p \geq 1} (a_{jp} - a_{j-p}) \frac{\sinh p\theta}{\sinh \theta} \quad (\text{B.23})$$

Les séries :

$$\begin{aligned} g_j(\cos \theta) &= a_0 + \sum_{p \geq 1} (a_{jp} + a_{j-p}) \cosh p\theta \\ h_j(\cos \theta) &= i \sum_{p \geq 1} (a_{jp} - a_{j-p}) \frac{\sinh p\theta}{\sinh \theta} \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

convergent uniformément en θ dans tout domaine de la forme $|\operatorname{Im}\theta| < \psi - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on veut), et représentent des fonctions analytiques en $\cos \theta$ dans l'ellipse $\mathcal{E}$.

D'autre part, pour $\theta = \theta_1 + i\theta_2$ (θ_1 et θ_2 réels), $\cosh p\theta$ et $\sinh p\theta / \sinh \theta$ sont, en module, bornés respectivement par $\cosh p\theta_2$ et $\sinh p\theta_2 / \sinh \theta_2$. De la positivité des a_{jp} , on déduit alors successivement :

$$\begin{aligned} |g_j[\cos(\theta_1 + i\theta_2)]| &\leq a_{j0} + \sum_{p \geq 1} (a_{jp} + a_{j-p}) \cosh p\theta_2 \\ &\leq F(\cosh \theta_2) \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Puis, sachant que les dérivées par rapport à $\cos \theta$ des fonctions $g_j(\cos \theta)$ sont encore de type positif :

$$g'_j(\cos \theta) = \sum_{p \geq 1} (a_{jp} + a_{j-p}) \frac{\sinh p\theta}{\sinh \theta} \quad (\text{B.26})$$

on obtient aisément :

$$\begin{aligned} |h_j[\cos(\theta_1 + i\theta_2)]| &\leq \sum_{p \geq 1} (a_{jp} + a_{j-p}) \frac{\sinh p\theta_2}{\sinh \theta_2} \\ &\leq g'_j(\cosh \theta_2) \\ &\leq F'(\cosh \theta_2) \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

ce qui termine la démonstration du théorème 5.

APPENDICE C

Dans cet appendice, nous rappelons ou démontrons quelques propriétés utiles des fonctions d du groupe des rotations.

1) Par définition :

$$d_{\lambda, \mu}^J(\theta) = \langle J, J_z = \lambda | e^{-i\theta J_y} | J, J_z = \mu \rangle \quad , \quad (C.1)$$

où nous avons utilisé des notations standard.

Les fonctions $d_{\lambda, \mu}^J(\theta)$ peuvent s'exprimer à l'aide des polynômes de Jacobi [17] :

$$d_{\lambda, \mu}^J(\theta) = \sqrt{\frac{(J+\mu)!(J-\mu)!}{(J+\lambda)!(J-\lambda)!}} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{\mu-\lambda} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{\mu+\lambda} P_{J-\mu}^{\mu-\lambda, \mu+\lambda}(\cos \theta) \quad . \quad (C.2)$$

Dans cette formule, les indices λ et μ sont traités de façon dissymétrique. On a cependant la propriété de symétrie :

$$d_{\mu, \lambda}^J(\theta) = (-)^{\lambda-\mu} d_{\lambda, \mu}^J(\theta) \quad . \quad (C.3)$$

Quand θ est réel, la matrice $d^J(\theta)$ est unitaire, donc :

$$\left| d_{\lambda, \mu}^J(\theta) \right| \leq 1 \quad \text{lorsque } \theta \text{ est réel} \quad . \quad (C.4)$$

2) Borne inférieure de $d_{\lambda, \lambda}^J(i\psi)$.

De (C.2) nous obtenons :

$$d_{\lambda, \lambda}^J(i\psi) = \left(\operatorname{Ch} \frac{\psi}{2}\right)^{2|\lambda|} P_{J-|\lambda|}^{0, 2|\lambda|}(\operatorname{Ch} \psi) \quad . \quad (C.5)$$

Mais lorsque $x > 1$, le polynôme de Jacobi $P_n^{0, \beta}(x)$ est une fonction croissante de β . Cela est évident sur le développement suivant (voir l'équation (4.3.2) de la référence [17]), où tous les termes sont positifs :

$$P_n^{0, \beta}(x) = \sum_{\nu=0}^n \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} \frac{(n+\beta)!}{\nu!(n+\beta-\nu)!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^{\nu} \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-\nu} \quad . \quad (C.6)$$

Donc :

$$d_{\lambda\lambda}^J(i\psi) \geq \left(\text{Ch } \frac{\psi}{2}\right)^{2|\lambda|} P_{J-|\lambda|}^{0,0}(\text{Ch } \psi) . \quad (\text{C.7})$$

D'autre part, le polynôme de Jacobi $P_{J-|\lambda|}^{0,0}(x)$ n'est rien d'autre que le polynôme de Legendre $P_{J-|\lambda|}(x)$ pour lequel il est très facile d'obtenir une borne inférieure. De la formule bien connue de Laplace :

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(x + \cos\Phi \sqrt{x^2-1}\right)^n d\Phi , \quad (\text{C.8})$$

on obtient, lorsque $x > 1$:

$$\begin{aligned} P_n(x) &\geq \frac{1}{\pi} \int_0^\Phi \left(x + \cos\Phi' \sqrt{x^2-1}\right)^n d\Phi' \\ &\geq \frac{1}{\pi} \left(x + \cos\Phi \sqrt{x^2-1}\right)^n \int_0^\Phi d\Phi' \\ &\geq \frac{\Phi}{\pi} \left(x + \cos\Phi \sqrt{x^2-1}\right)^n , \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

où Φ est un angle arbitraire compris entre 0 et π . Combinant (C.7) et (C.9), on obtient une borne inférieure pour $d_{\lambda\lambda}^J(i\psi)$:

$$d_{\lambda\lambda}^J(i\psi) \geq \frac{\Phi}{\pi} (\text{Ch } \psi + \cos\Phi \cdot \text{Sh } \psi)^{J-|\lambda|} \left(\text{Ch } \frac{\psi}{2}\right)^{|\lambda|} . \quad (\text{C.10})$$

Une caractéristique importante de cette borne est qu'elle croît exponentiellement en J .

Notons en passant que $d_{\lambda\lambda}^J(i\psi)$ est positif.

3) Comportement asymptotique de $|d_{\lambda\lambda}^J(\theta)|$ lorsque $J \rightarrow \infty$, à transfert t strictement négatif :

De (C.2), nous obtenons lorsque $J \rightarrow \infty$:

$$d_{\lambda\mu}^J(\theta) \sim \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{\mu-\lambda} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{\mu+\lambda} p_{J-\mu}^{\mu-\lambda, \mu+\lambda}(\cos \theta) . \quad (C.11)$$

D'autre part, d'après le théorème (7.32.2) de la référence [17] :

$$p_{J-\mu}^{\mu-\lambda, \mu+\lambda}(\cos \theta) \underset{J \rightarrow \infty}{\sim} \theta^{-(\mu-\lambda)-1/2} J^{-1/2} . \quad (C.12)$$

Par conséquent :

$$d_{\lambda\mu}^J(\theta) \underset{J \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\text{Cste}}{\sqrt{J} \sin \theta} \quad (C.13)$$

APPENDICE D

Cet appendice est consacré à la démonstration du théorème suivant :

Théorème : Soit $F(s,t)$ une fonction de la variable réelle $s \geq s_0 > 0$, et de la variable complexe t , analytique dans le cercle $|t| < 1$, et soumise aux bornes suivantes :

- 1) $|F(s,t) t^\lambda| < s^\alpha \log^\beta s$ lorsque $-1 \leq t \leq 0$ et $s > s_0$, où λ, α et β sont des constantes réelles, et $\lambda > 0$.
- 2) $|F(s,t)| < s^N$ lorsque $|t| = 1$ et $s > s_0$, où N est un entier plus grand que α .

Alors :

$|F(s, t=0)| < Cste s^\alpha \log^{\beta+2\lambda} s + Cste'$ lorsque $s > s_1$, où s_1 est fini et $\geq s_0$.

Démonstration : La méthode consiste à construire la fonction $G(s,t)$ définie à une phase constante près, qui est analytique en t dans le cercle $|t| < 1$ coupé le long de $-1 \leq t \leq 0$, et qui atteint sur la frontière de son domaine les bornes de $F(s,t) t^\lambda$. D'après le principe du module maximum, $|G(s,t)|$ est une borne de $|F(s,t) t^\lambda|$ pour $|t| < 1$.

Introduisons par commodité la nouvelle variable :

$$z = \sqrt{t}, \quad \operatorname{Re} z \geq 0,$$

et posons : $F(s,t) \equiv f(s,z)$

$$G(s,t) \equiv g(s,z).$$

Le cercle $|t| \leq 1$ devient le domaine $\mathcal{D}$ défini par :

$$|z| \leq 1, \quad \operatorname{Re} z \geq 0.$$

La fonction $g(s,z)$ est telle que :

- 1) $|g(s,z)| = s^N$ lorsque $|z| = 1$
- 2) $|g(s,z)| = s^\alpha \log^\beta s$ lorsque $\operatorname{Re} z = 0$.

Il est facile de construire $g(s,z)$, et l'on trouve à une phase constante arbitraire près :

$$g(s,z) = \exp \left[\frac{2}{\pi} \left\{ -i(\log s^N) \log \frac{i-z}{i+z} + \left[\log(s^\alpha \log^\beta s) \right] \left(i \log \frac{i-z}{i+z} + \frac{\pi}{2} \right) \right\} \right].$$

Plus simplement, le module de $g(s,z)$ est donné par :

$$|g(s,z)| = \exp \left[\frac{2}{\pi} \left\{ \Phi(z) (\log s^N) + \left[\frac{\pi}{2} - \Phi(z) \right] \log (s^\alpha \log^\beta s) \right\} \right],$$

où : $\Phi(z) = \text{Arg} \frac{i-z}{i+z}$.

$\Phi(z)$ a une interprétation géométrique simple (voir figure D.1) :

$\Phi(z)$ reste constant sur tout arc de cercle $\mathcal{C}_\Phi$ passant par les points $z = \pm i$, est égal à zéro lorsque $\text{Re } z = 0$, et à $\frac{\pi}{2}$ lorsque $|z| = 1$.

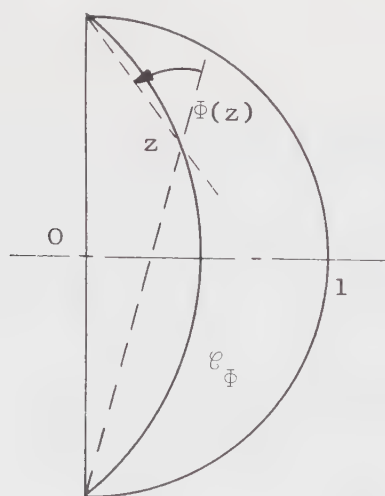


Figure D.1
plan complexe z

Appliquant le principe du module maximum à la fonction $z^{2\lambda} f(s,z)/g(s,z)$, on obtient que :

$$\begin{aligned} |f(s,z)| &\leq \frac{1}{|z|^{2\lambda}} \exp \left[\frac{2}{\pi} \left\{ \Phi(z)(\log s^N) + \left[\frac{\pi}{2} - \Phi(z) \right] \log(s^\alpha \log^\beta s) \right\} \right] \\ &\leq s^\alpha \log^\beta s \frac{\exp(C(s) \Phi(z))}{|z|^{2\lambda}}, \end{aligned}$$

avec : $C(s) = \frac{2}{\pi} [(N-\alpha) \log s - \beta \log \log s]$.

Ceci va nous fournir aisément une borne de $|F(s, t = 0)|$. En effet, l'image dans le plan t de l'arc de cercle $\mathcal{C}'_{\Phi}$ est une courbe $\mathcal{C}'_{\Phi}$ fermée autour de l'origine $t = 0$ (figure B.2).

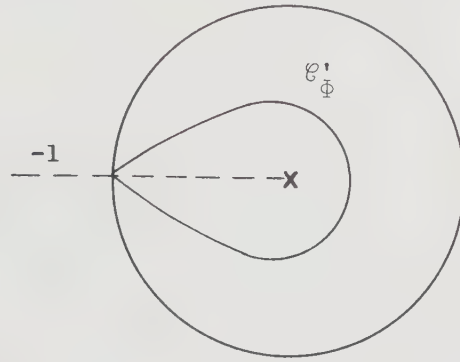


Figure D,2
plan complexe t

Profitant de ce que $F(s, t)$ est analytique dans le cercle $|t| < 1$, nous pouvons appliquer une fois de plus le principe du module maximum dans le domaine limité par $\mathcal{C}'_{\Phi}$, et écrire :

$$\begin{aligned} |F(s, t = 0)| &\leq \max_{\mathcal{C}'_{\Phi}} |F(s, t)| \\ &\leq s^{\alpha} \log^{\beta} s \cdot \max_{\mathcal{C}'_{\Phi}} \frac{\exp(C(s) \Phi(z))}{|z|^{2\lambda}} . \end{aligned}$$

Le maximum le long de $\mathcal{C}'_{\Phi}$ est obtenu lorsque $|z|$ est minimum, c'est-à-dire lorsque z est réel et égal à $\operatorname{tg} \frac{\Phi(z)}{2}$:

$$|F(s, t = 0)| < s^{\alpha} \log^{\beta} s \cdot \frac{\exp(C(s) \Phi)}{\left(\operatorname{tg} \frac{\Phi}{2}\right)^{2\lambda}} .$$

Il ne nous reste plus maintenant qu'à minimiser le deuxième membre de cette inégalité, lorsque Φ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$. La fonction

$$\left[\exp(C(s) \Phi) \right] / \left(\operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} \right)^{2\lambda} \text{ atteint son minimum lorsque :}$$

$$\sin \Phi = \frac{2\lambda}{C(s)} .$$

Il existe toujours une constante finie $s_1 \geq s_0$ telle que :

$$C(s) > 2\lambda \quad \text{lorsque} \quad s > s_1 .$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 \underset{0 \leq \Phi \leq \frac{\pi}{2}}{\text{Min}} \quad \frac{\exp(C(s)\Phi)}{\left(\operatorname{tg} \frac{\Phi}{2}\right)^{2\lambda}} &< \underset{0 \leq \Phi \leq \frac{\pi}{2}}{\text{Min}} \frac{\exp\left[\frac{\pi}{2}(C(s) \sin \Phi)\right]}{\left(\frac{1}{2} \sin \Phi\right)^{2\lambda}} \\
 &< e^{\pi\lambda} \left[\frac{C(s)}{\lambda}\right]^{2\lambda} \\
 &< e^{\pi\lambda} \left[\frac{2}{\pi\lambda} (N-\alpha)\right]^{2\lambda} \log^{2\lambda} s + \text{Cste} \quad ,
 \end{aligned}$$

d'où le résultat cherché :

$$|F(s, t = 0)| < \text{Cste } s^\alpha \log^{\beta+2\lambda} s + \text{Cste}' \quad .$$

REFERENCES

- [1] - S.FUBINI et G.SEGRE : Nuovo Cimento, 45, 641 (1966)
- [2] - V. de ALFARO, S.FUBINI, G.ROSSETTI et G.FURLAN : Phys. Lett. 21, 576 (1966)
- [3] - A.MARTIN : Nuovo Cimento, 42, 930 (1966)
- [4] - A.MARTIN : Phys. Rev. 129, 1432 (1963)
- [5] - M.FROISSART : Phys. Rev. 123, 1054 (1961)
- [6] - T.L.TRUEMAN : Phys. Rev. Letters 17, 1198 (1966)
Voir aussi : R.ODORICO : Nuovo Cimento, 51A, 1021 (1967)
- [7] - G.SOMMER : Nuovo Cimento 52A, 373 (1967)
- [8] - K.SYMANZIK : Phys. Rev. 100, 743 (1957)
Боголюбов Н.Н., Медведев Б.В., Поливанов М.К. : Вопросы
теории дисперсионных соотношений , Москва (1957)
- [9] - J.BROS, H.EPSTEIN et V.GLASER : Nuovo Cimento 31, 1265 (1964)
- [10] - H.LEHMANN : Nuovo Cimento 10, 579 (1958)
- [11] - T.L.TRUEMAN et G.C.WICK : Annals of Physics 26, 322 (1964)
L.L.C.WANG : Phys. Rev. 142, 1187 (1965)
G.COHEN-TANNOUDJI, A.MOREL et H.NAVELET : Annals of Physics 46, 111 (1968)
- [12] - M.JACOB et G.C.WICK : Annals of Physics 7, 404 (1959)
- [13] - A.KOTANSKI : Acta physica polonica 29, 699 (1966) et 30, 629 (1966)
- [14] - D.N.WILLIAMS : Preprint UCRL (11113)
- [15] - J.BROS, H.EPSTEIN et V.GLASER : Communications in Mathematical
Physics 1, 240 (1965)
- [16] - J.BROS : Communication privée ; voir aussi R.J.EDEN et al.,
The analytic S-matrix, Cambridge (1966)
- [17] - G.SZEGO : Orthogonal Polynomials, American Mathematical Society, vol.23
- [18] - A.MARTIN : Brandeis Summer Institute(1967)

- [19] - E.PHRAGMEN et E.LINDELOF : Acta Math., 31, 381 (1908)
- [20] - G.MAHOUX et A.MARTIN : Phys. Rev. 174, 2140 (1968)
- [21] - G.MAHOUX et A.MARTIN : non publié
- [22] - J.S.BELL : Preprint du CERN, TH.971
- [23] - G.SOMMER : Nuovo Cimento 52, 122 (1967)
- [24] - C. de CALAN et R.STORA : Communication privée ; ce résultat est une conséquence immédiate des travaux de K.HEPP, : Helvetica Physica Acta 36, 355 (1963)
- [25] - P.MOUSSA et R.STORA : Hercegnovi, 265 (1966)
- [26] - J.DIXMIER : Les C^* -algèbres et leurs représentations, Paris 255 (1964)
M.A. NAIMARK : Normed rings, Hollande, 391 (1959).

Manuscrit reçu le 29 avril 1969

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

Les Pulsars

VU

LE PRESIDENT DU JURY

J. YVON

VU ET APPROUVE

POUR LE DOYEN PAR AUTORISATION SPECIALE

LE CHEF DU SERVICE DE SCOLARITE

S. CAMINADE

VU

ET PERMIS D'IMPRIMER

LE RECTEUR DE L'ACADEMIE

DE PARIS

Jean ROCHE

